

LES INÉGALITÉS ÉCONOMIQUES

APPLICATIONS :

AUX INÉGALITÉS DES RICHESSES, A LA
CONCENTRATION DES ENTREPRISES,
AUX POPULATIONS DES VILLES, AUX
STATISTIQUES DES FAMILLES, ETC.

d'une Loi nouvelle

LA LOI DE L'EFFET PROPORTIONNEL

Thèse soutenue pour le grade de Docteur en Droit

PAR

R. GIBRAT

Ingénieur au corps des Mines

Sous-Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

L'auteur espère que le lecteur qui
ouvrira ce livre le fera avec l'idée que
l'économique est une science plutôt
qu'une simple variété de littérature et
en s'attendant à fournir pour le lire
un effort intellectuel aussi grand que
s'il lisait un traité de physique, de
chimie ou de biologie...

(N. CARVER, *la répartition des
richesses, préface.*)

Président : M. GONNARD, professeur.

Assesseurs } MM. DULAC, professeur à la Faculté des Sciences
PERROUX, chargé de cours

LIBRAIRIE

DU

RECUEIL SIREY

(Société Anonyme)

22, rue Soufflot — PARIS (V°)

—
1931



Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSE POUR LE DOCTORAT

UNIVERSITÉ DE LYON

FACULTE DE DROIT

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. APPLETON (Charles), *, ☉ I., Correspondant de l'Institut. — GARRAUD, *, ☉ I., ✠, Correspondant de l'Institut. — APPLETON (J.), O. *, ☼, ☉ I.

DOYEN

M. JOSSERAND, *, ☉ I.

ASSESEUR

M. GARRAUD (Pierre), ☼, ☉ I.

PROFESSEURS

MM. PIC (Paul), * O., ☉ I., Professeur de *Droit international public*.

LAMBERT, *, ☉ I., Professeur de *Droit comparé*.

LAMEIRE, ☉ I., Professeur de *Droit constitutionnel*.

JOSSERAND, *, ☉ I., Professeur de *Droit civil*.

LÉVY, *, ☉ I., Professeur de *Droit civil*.

GONNARD, ☼, ☉ I., Professeur d'*Economie politique*.

ANTONELLI, *, ☼, ☉ I., Professeur d'*Histoire des doctrines économiques*.

PERROUD, ☼, ☉ I., Professeur de *Procédure civile*.

COHENDY (Georges), ☉ I., Professeur de *Droit commercial général*.

GARRAUD (Pierre), ☼, ☉ I., Professeur de *Droit criminel*.

ROUBIER, ☉ I., Professeur de *Droit civil*.

FALLETI, Professeur de *Droit romain*.

AGREGES

MM. PHILIP, chargé d'un cours d'*Economie politique*.

LAMBERT (Jacques), *Histoire du Droit*.

PERROUX (François), *Science des Finances*.

DEPLANCHÉ, *Pandectes et Droit romain*.

CHARGE DE COURS

M. CONDOMINE, ☉ A., *Droit civil* (Capacité, 1^{re} année).

La Faculté n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions écrites dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

LES INÉGALITÉS ÉCONOMIQUES

APPLICATIONS :

AUX INÉGALITÉS DES RICHESSES, A LA
CONCENTRATION DES ENTREPRISES,
AUX POPULATIONS DES VILLES, AUX
STATISTIQUES DES FAMILLES, ETC.

d'une Loi nouvelle

LA LOI DE L'EFFET PROPORTIONNEL

Thèse soutenue pour le grade de Docteur en Droit

PAR

R. GIBRAT

Ingénieur au corps des Mines

Sous-Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

L'auteur espère que le lecteur qui
ouvrira ce livre le fera avec l'idée que
l'économique est une science plutôt
qu'une simple variété de littérature et
en s'attendant à fournir pour le lire
un effort intellectuel aussi grand que
s'il lisait un traité de physique, de
chimie ou de biologie...

(N. CARVER, *la répartition des
richesse, préface.*)

Président : M. GONNARD, *professeur.*

Assesseurs { MM. DULAC, *professeur à la Faculté des Sciences*
PERROUX, *chargé de cours*

LIBRAIRIE

DU

RECUEIL SIREY

(Société Anonyme)

22, rue Soufflot — PARIS (V^e)

—
1931



INTRODUCTION

§ 1. Les biens sont inégalement répartis entre les hommes, les hommes inégalement répartis entre les entreprises..., d'une manière générale, les grandeurs économiques qui sont formées de biens et d'hommes comprennent un nombre variable de ces biens ou de ces hommes. Notre but est de définir, puis d'étudier l'inégalité de ces nombres.

Ce problème est de la plus haute importance, il comprend celui de l'inégalité des pauvres et des riches, celui de la concentration industrielle, etc...

§ 2. Il peut sembler étonnant que l'on ne connaisse pas, à l'heure actuelle, une définition acceptable de l'inégalité. Mais le problème est difficile. Prenons un exemple, le revenu d'un individu. Théoriquement, l'impôt nous permet de connaître ce revenu. On peut donc calculer pour chaque revenu possible, le nombre d'individus d'un pays qui le possède. La répartition des revenus entre les hommes s'exprime donc par une masse presque infinie de chiffres. Nous ne pouvons, de leur inégalité, que posséder une impression confuse.

§ 3. Il faut donc, pour obtenir une solution de cette difficulté, faire appel à la science qui étudie les masses de chiffres, à la *Statistique*. Nous connaissons tous une gran-

leur statistique qui représente une des idées confuses que donne une masse de chiffres : c'est la *moyenne*. Elle représente, du moins on l'admet en général, la valeur la plus probable de la grandeur étudiée. Elle ne peut évidemment servir pour l'inégalité. Bien au contraire, l'inégalité doit en être indépendante, car si on suppose que tous les revenus soient subitement doublés, l'idée de bon sens que nous avons de l'inégalité nous oblige à admettre que celle-ci n'a pas varié.

§ 4. On doit donc songer, pour résoudre le problème, à utiliser les différents procédés de la statistique. On ne conserve pas tous les chiffres, il serait impossible de les recenser. On divise les individus en classes correspondant à certaines limites de revenus et on compte combien il y a d'individus par classe. On ne doit pas, pour comparer les répartitions à deux époques différentes, comparer le nombre des individus de chaque classe, même rapporté au nombre total, aux deux instants considérés. En effet, la moyenne peut avoir changé¹. Or, telle est la méthode employée par l'immense majorité des économistes.

On peut, au contraire, représenter les résultats de notre recensement par une courbe continue, dont il est facile de saisir les propriétés d'un seul coup d'œil. On pourrait même les saisir toutes si cette courbe était une droite.

On est certain d'obtenir un tel résultat lorsqu'on connaît l'équation de cette courbe². C'est dans ce but qu'une des parties les plus importantes de la statistique consiste dans l'*ajustement* d'une formule à la répartition, c'est-à-dire à l'ensemble des chiffres observés.

1. Supposons que tous les revenus aient doublé. La dernière classe va s'appauvrir et la première s'enrichir au contraire. Or l'inégalité n'aura pas varié.

2. En effet il suffit de faire un changement convenable de variables.

Lorsque nous connaissons la formule, il deviendra aisé de faire choix parmi les paramètres qui y rentrent¹ de celui que nous prendrons pour l'inégalité. Il suffira que ce nombre satisfasse à toutes les conditions imposées par l'idée que nous avons d'une manière confuse de l'inégalité.

§ 5. On devine donc le plan de notre étude théorique : il nous faut d'abord donner les éléments de statistique suffisants pour le problème, c'est-à-dire montrer comment on obtient une courbe à partir des observations, comment on définit des grandeurs caractéristiques de cette courbe, et, enfin, comment on peut réaliser l'ajustement.

§ 6. Notre part consiste dans la donnée d'une formule que nous croyons nouvelle au moins en Economie politique. Cette formule, comme d'ailleurs la formule célèbre de Pareto, permet d'obtenir, par des transformations appropriées, une droite comme représentative de la répartition. Elle permet donc, au même titre que celle de Pareto, de définir et de calculer rapidement un indice d'inégalité. Mais elle a, sur cette dernière, deux grands avantages, un d'ordre pratique, l'autre théorique. Elle réalise, de plus près, l'ajustement, et elle dérive d'une loi économique statistique.

§ 7. L'expression de « loi économique » est trop discutée pour que nous ne précisions pas notre idée.

On a parlé, pendant et après la guerre, de faillite des lois économiques². On en parle moins. Il en est ainsi dans

1. Ainsi supposons que cette courbe soit une droite, il sera très naturel de prendre la pente de cette droite comme caractéristique de l'inégalité. La droite se déplacera parallèlement à elle-même quand tous les revenus doubleront. L'inégalité ne changera donc pas.

2. Un article de M. Gonnard dans la *Revue politique et parlementaire* de 1917 et une thèse de H. Germain Martin.

toutes les branches de la connaissance. On a dit que le principe de la conservation de l'énergie avait été détruit par la découverte du radium. Pas un physicien ne le croit¹. C'était hier un lieu commun de citer la relativité restreinte ou généralisée, la théorie ondulatoire de de Broglie-Schrödinger en fournira d'autres demain. M. Marshall pense que les lois économiques sont analogues aux lois des sciences naturelles parce qu'elles « ont à s'occuper de l'action complexe d'une foule de causes hétérogènes et incertaines² ». Cependant les sciences physiques connaissent cette action et, depuis quelques années, on a souvent³ montré aux économistes la nature *statistique* de la loi de Mariotte et de ses relations avec la théorie atomique. Le principe de Carnot, qui exprime que la chaleur ne peut passer d'un corps froid à un corps chaud, est lui aussi de nature statistique. A l'échelle moléculaire, il est faux⁴. Les mathématiques elles-mêmes, quoi qu'on pense peuvent servir de comparaison. Le nombre premier a une définition bien simple : tout nombre divisible par lui-même et par l'unité. Cependant, malgré les plus grands efforts, on ignore complètement leur loi de distribution. Aussi on s'est contenté d'une loi *statistique* qui donne le nombre de ceux qui sont inférieurs à un nombre entier donné.

A toutes ces analogies, on objecte que l'économie politique s'occupe de l'homme et que le libre arbitre de l'individu lui permet un choix, ce qui crée un fossé infranchis-

1. C'est pourtant ce qu'a écrit M. Baudin. « La loi économique », *Revue d'Economie politique*, 1924, p. 640. Il en déduit que « les sciences exactes ne semblent jusqu'à présent pas être plus rigoureuses que les économiques. »

2. *Principes*, p. 138.

3. Par exemple, Rueff : *Théorie des phénomènes monétaires. Introduction*, Barrault : *L'idée d'évolution dans la science économique*, (*Revue d'histoire des doctrines économiques et sociales*, 1927, p. 174).

4. Mouvement brownien. queues des comètes, d'après Arrhenius, etc.

sable entre la science économique et celles de la nature, même statistiques¹. Il semblerait invraisemblable à notre esprit que la pression d'un gaz ne soit pas soumise à une loi. Oublions l'expérience acquise, pourquoi voulons-nous que les phénomènes de natalité, par exemple, présentent des caractères permanents ?

Un acte de foi est nécessaire : on peut cependant donner à l'économiste, quelques raisons de le faire. D'abord la statistique actuellement faite nous montre bien des traits permanents. De plus l'exemple de la physique, quoique nettement différent est encourageant. Enfin peut-on dire vraiment que « les lois économiques parfaitement vraies quand règne le chaos individualiste cessent purement et simplement de régir la succession des phénomènes² » lorsque le chaos cesse. Ce chaos est-il donc toujours semblable à celui des molécules d'un gaz ? Non, chaque ouvrier cherche à toucher le salaire maximum, etc... Le principe hédonistique est là qui oriente les activités et son existence permet de construire une théorie parfaite des prix³. On objecte l'*homo œconomicus*. Mais il existe entre l'économie rationnelle et l'économie politique, la même différence qu'entre la physique du gaz parfait et celle du gaz réel.

§ 8. Notre loi est essentiellement statistique. Elle ramène simplement les courbes des répartitions économiques

1. On ne s'arrête pas, en général, suffisamment sur ce point. Ainsi M. Rueff imagine une molécule pensante, mais *elle ne l'est pas*. Il y a transcendance, au moins en apparence, entre le choix humain et la complexité des trajectoires moléculaires. Il est curieux de voir que les théories physiques ultra-modernes, comme celle de Fermi donnent une sorte de libre arbitre aux molécules.

2. Rueff, p. 17.

3. Walras, Pareto et Divisia (équation supplémentaire). Cette théorie est d'ailleurs statistique pour une part, car elle utilise des équations *prises en moyenne*.

à une courbe célèbre, la courbe en cloche. Nous connaissons cette courbe dite aussi de Gauss ou des erreurs. Son existence s'interprète en admettant que toutes les variations élémentaires sont indépendantes. Ainsi elle représente la répartition d'un nombre infini de coups de pilé ou face, car la probabilité d'un coup est toujours $1/2$ quel que soit le numéro d'ordre de ce coup. Admettez que ce ne sont pas les variations *absolues* de la grandeur, du revenu par exemple qu'il faut considérer en économie politique, mais les variations *relatives* et vous obtenez notre loi, la loi dite de l'effet proportionnel.

§ 9. Evidemment il est un peu inattendu de voir, comme nous le montrerons, la formule qui résulte de cette loi vérifiée par toutes les répartitions économiques, que nous rencontrerons. Que faut-il déduire de ce fait d'expérience ? Rigoureusement on ne peut pas, du fait que la formule est bien vérifiée, en déduire que la loi est vraie, puisque toute loi convient qui est suffisamment voisine de la première pour donner un accord aussi bon. Il est cependant permis de croire à un principe général, satisfait devant un tel ensemble de vérifications. Démontrerait-on péremptoirement que la loi est fausse, il n'en resterait pas moins que la formule ajuste la répartition d'une manière largement suffisante pour l'utilisation de notre indice.

§ 10. On s'étonne sans doute que nous ne donnions pas purement et simplement la définition de l'inégalité à laquelle cette formule de l'effet proportionnel¹ conduit. C'est que, si on peut facilement donner de la formule un

1. On voit pourquoi on l'appelle « de l'effet proportionnel ». Considérer les variations relatives, revient à considérer les rapports des variations absolues aux grandeurs.

aperçu en langage ordinaire, son expression mathématique est complexe. Nous donnerons cette définition dans le dernier chapitre de notre étude théorique, celle-ci formant la première partie de ce volume. Nous y arriverons en étudiant l'ajustement par les formules déduites ou non d'une loi. Le raisonnement qui justifie la courbe en cloche, convenablement modifié, nous donnera la formule et la loi de l'effet proportionnel.

§ 11. Nous serons donc, à la fin de la première partie, en possession d'un indice d'inégalité et d'une formule représentant bien les répartitions économiques. Nous les utiliserons pour l'étude des deux principales familles de répartitions, celle des biens parmi les hommes, celle des hommes parmi les entreprises. Ceci formera les deuxième et troisième parties.

La quatrième et dernière partie sera consacrée à l'étude du champ d'application de notre formule.

§ 12. Tout ceci ne va pas sans quelque emploi des mathématiques. Elles n'introduisent rien de mystérieux, mais forment un langage commode, indispensable. Afin de faciliter le plus possible la lecture de cet ouvrage, nous avons d'abord rejeté en note toutes les parties mathématiques qui ne sont pas indispensables. De plus, nous avons rejeté en annexe la démonstration des formules, enfin un résumé général de la première partie qui se trouve à la fin de celle-ci peut, dans une certaine mesure, éviter son étude¹.

Nous ne pouvons terminer cette introduction sans

1. Un répertoire des termes techniques définis dans cette première partie se trouve à la fin du volume. Il nous est en effet absolument impossible de ne pas employer le langage statistique.

adresser nos remerciements les plus vifs à tous ceux qui ont bien voulu nous encourager¹, particulièrement à MM. Aftalion, Colson, Darmois, Divisia, Dugé de Bernonville, Huber². Nous devons, de plus, une grande reconnaissance à M. Perroux qui, tout le long de ce travail, ne nous a pas ménagé les conseils les plus précieux.

1. Le lecteur voudra bien considérer que, tous les calculs ont été fait par l'auteur seul. Cet ouvrage utilise plus de six cent répartitions. Il excusera donc les fautes de calcul qui doivent subsister malgré toutes les précautions prises.

2. MM. Huber et Dugé de Bernonville, directeur et sous-directeur de la Statistique générale de la France, ont bien voulu nous donner l'hospitalité dans leur *Bulletin*. Nous y avons publié un résumé technique (XIX, pp. 469 à 514). Nous les en remercions ici spécialement.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE THÉORIQUE DES RÉPARTITIONS ET DE LEUR INÉGALITÉ

On peut se demander si des perfectionnements mathématiques sont vraiment utiles et si ce n'est pas prendre, comme on dit familièrement, une massue pour assommer une mouche. Que certaines applications des mathématiques aux sciences sociales aient pu donner lieu à ce reproche, je ne le conteste pas ; mais à ce qu'il me semble, c'est faute d'avoir pris garde tout d'abord à la précision des nombres utilisés...

(Allocution de M. E. BOREL, *J. S. S. P.*, 1922).

SOMMAIRE DE LA PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I. — Représentation graphique et courbes de fré-

Le matériel fourni par l'observation donne des séries homogrades ou hétérogrades (caractère de classement fixe ou variable). Définitions des fréquences et représentation graphique. Histogrammes et courbes de fréquence. Ajustement. Types de courbes. Interprétation de la représentation analytique.

CHAPITRE II. — Les grandeurs significatives d'une répartition.

Classement en grandeurs dépendant de l'ordre des éléments (médiane, quartils, décils, centils, médiale, quartal, mode), et n'en dépendant pas (moyennes diverses, moments).

Relation empirique entre le mode, la médiane et la moyenne.

Dispersion et solidarité (écart moyen, interquartil et interquartal, standard déviation, indice de solidarité).

Exemples montrant l'intérêt d'une grandeur définie mathématiquement : solidarité des prix en France depuis la stabilisation des changes, (différentes marchandises ou différents lieux) ; solidarité des salaires dans l'espace, solidarité des différents taux d'intérêt. Relation entre ces solidarités et les mouvements des prix.

CHAPITRE III. — L'ajustement mathématique *a priori*.

Méthode générale.

Application immédiate des théories mathématiques : polynômes divers, (Lagrange, Hermite, Legendre, Jordan, Tchebytschef).

Méthode des moments : (Pearson) les sept types de courbes.

Equations de Pareto : ses trois formules, la généralisation de M. Frechet.

Application de la méthode des moments : exemple montrant la suite des calculs.

CHAPITRE IV. — L'ajustement par les formules du Calcul des probabilités.

Les principales formules du Calcul des probabilités : le problème du tirage dans une urne, la formule binomiale, les approximations de Laplace, Charlier, Edgeworth, Jordan. La formule de Poisson et la permanence des petits nombres.

Application aux répartitions statistiques : utilisation pratique de la formule de Laplace, principe des moments ou interpolation graphique à l'aide d'une table de la fonction de Gauss ; exemples : taux de paupérisme en Angleterre, salaires suivant le lieu.

Assimilation des répartitions économiques à un résultat de tirage dans une urne le raisonnement de Kapteyn, discussion, indépendance de la vérification d'une formule et de son interprétation.

CHAPITRE V. — La formule de l'effet proportionnel.

L'extension du raisonnement de Kapteyn pour les répartitions non-symétriques, le changement de variable logarithmique.

L'ajustement par la formule : exemples : dépense de nourriture, établissement d'après l'importance du personnel, contribuables assujettis à la cédule de l'income-tax (détermination de la troisième constante X_0), contribuables frappés de super-tax. Dans chaque cas on montre le détail des calculs nécessaires pour passer de la répartition observée à la formule représentative.

CHAPITRE VI. — La loi de l'effet proportionnel.

Conséquences d'un ajustement satisfaisant.

Interprétations de divers groupes de répartition : entre-

prises suivant l'importance du personnel (discussion des trois conditions nécessaires pour l'application de la loi), individus suivant leur revenu (idem).

Généralisation possibles : la proportionnalité de l'effet élémentaire phénomène général.

CHAPITRE VIII. — L'inégalité d'une répartition.

La définition de l'inégalité est nécessaire, elle a donné lieu à beaucoup d'erreurs (double sens de l'indice de Pareto, etc.). Certaines définitions proposées sont indépendantes d'un ajustement préalable : interquartil relatif ou non, interquartil, déviation intermédiaire, rapport des quartils, cinquièmes de Kiaer, différence moyenne de Gini-March.

D'autre dépendent d'un ajustement : asymétrie et cossure de Pearson, indice de Pareto, rapports d'inégalité (principal ou secondaires) de M. Mourre.

Enfin on peut utiliser la formule de l'effet proportionnel : l'indice qui s'en déduit logiquement équivaut à l'emploi de tous les précédents. Sa détermination utilise l'ensemble de la distribution et non quelques points particuliers. La « mobilité » d'une variable.

RÉSUMÉ de la première partie.

CHAPITRE PREMIER

REPRESENTATION GRAPHIQUE ET COURBES DE FREQUENCE

§ 1. **Le matériel fourni par l'observation**¹. — « Les observations les plus simples de la statistique, nous apprend Darmois, consistent à dénombrer dans une population les individus possédant un certain caractère ou plus généralement dans un groupe de faits ceux qui remplissent une certaine condition². »

Ainsi on recensera, en France, les individus taxés à l'impôt sur le revenu. En opérant sur une succession d'années, on obtiendra une série de nombres n_1 qu'il est naturel de comparer, par exemple, aux chiffres correspondant m_1 de la population. On a ainsi, une série (ou répartition, ou distribution)

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_N \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_N \end{pmatrix}$$

1. Nous devons beaucoup, pour la rédaction de ce chapitre et d'une manière générale pour celle de la première partie, aux traités classiques de Statistique. En les classant par ordre de difficulté mathématique croissante, nous citerons : A. Aftalion, *Cours de statistique* (1929); A. Bowley, *Eléments de statistique* (1929); G. Darmois, *statistique mathématique*; Elderton, *Frequency curves and correlation* (déjà ancien); Ch. Jordan, *Statistique mathématique* (1927). (En dehors de l'ouvrage d'Elderton, nous ne citons que les ouvrages très récents et de langue française.)

2. Ainsi ce premier paræraphe suit de près la rédaction du chapitre IV du traité de Darmois : « Matériel fourni par l'observation ».

Une telle série est dite *homograde*¹.

§ 2. Par contre, une série *hétérograde* est obtenue lorsqu'on suppose que « le caractère sur lequel porte l'observation est mesurable et capable de prendre un certain nombre de valeurs différentes ». (Darmois).

Ainsi, le recensement des salaires dans un groupe d'individus conduit à une série hétérograde.

On ne considère donc les différences d'intensité du caractère que dans les séries hétérogrades. Seules elles peuvent manifester une inégalité d'intensité. Nous les considérerons donc exclusivement dans la suite².

§ 3. **Fréquences.** — Une série hétérograde est formée par la donnée du nombre de fois y_1 pour lesquels le caractère de classement a la valeur x_1 . Soit N le nombre total d'individus (ou de faits recensés), on appellera *fréquence* le rapport f_1 de ce nombre y_1 au nombre total N . La somme des fréquences est donc l'unité. Nous avons là un premier exemple du traitement des données de l'observation³.

§ 4. **Représentation graphique.** — On peut représenter graphiquement une série statistique par un ensemble de points d'abscisses x_1 et d'ordonnées y_1 ou f_1 . On obtient ainsi, soit le *diagramme* statistique, soit le diagramme des fréquences.

1. Ces dénominations sont dues à Charlier, le célèbre statisticien de Lund. Bien entendu, on peut aussi considérer la variation du nombre dans l'espace, étudier le pourcentage des personnes taxées dans différents pays, on a encore une série homograde.

2. Ainsi, dans notre étude sur la solidarité des prix d'intérêt, la considération de divers taux à un instant donné (série hétérograde), nous conduit à un indice de solidarité (ou d'inégalité), mais l'étude dans le temps est une série homograde.

3. Ces définitions ne sont pas encore universellement admises. M. Attalion, appelle fréquences le nombres y_i .

Théoriquement, la variable n'est jamais continue, le caractère de classement varie par petits sauts. S'il s'agit de francs, la variation élémentaire sera au moins de 0 fr. 05. Souvent même, pour rendre pratiquement possible un recensement, on partage l'intervalle total de variation en *classes*.

Ainsi nous étudions dans le chapitre III (première partie) le classement des villes de France d'après le nombre indice des prix de détail. Notre tableau indique le nombre des villes pour lesquelles le nombre indice est compris entre 3.900 et 4.000, 4.000 et 4.100, 4.100 et 4.200, etc.

§ 5. Il n'est pas nécessaire que les différents intervalles soient égaux, comme dans l'exemple précédent. Les statistiques d'impôt sur le revenu, publiées dans l'*Annuaire statistique de la S. G. F.* donnent le nombre des contribuables taxés pour un revenu de 10.000 à 30.000 fr., 30.000 à 50.000, 50.000 à 200.000, etc.

Le choix de l'intervalle est déterminé par des considérations pratiques. Il faut, avec le minimum d'encombrement, refléter le mieux possible la série initiale.

Le diagramme est donc formé d'une suite de points isolés. Il est utile, pour que l'œil saisisse plus facilement les particularités de la série, de compléter le graphique en construisant les rectangles de hauteur y_1 (ou f_1), d'abscisse moyenne x_1 et de largeur égale à l'intervalle de la classe. On a ainsi un polygone en escalier ou *histogramme*¹.

§ 6. **Courbe de fréquence.** — On obtient par un processus inverse de celui qui a donné naissance à l'histogramme.

1. L'étude mathématique de ces fonctions en escalier est faite dans le chapitre VI (statistique) du fasc I du tome I du grand traité de calcul des probabilités par E. Borel (en cours de publication)

On suppose que le caractère mesuré varie de manière continue. L'intervalle élémentaire devient infiniment petit et l'histogramme une courbe continue, la *courbe des fréquences*¹. Pratiquement, elle sera obtenue en adoucissant les contours de l'histogramme, on se rapproche ainsi de la vérité, c'est-à-dire d'un recensement complet. L'allure du phénomène devient plus régulière.

§ 7. Ajustement. — Lorsque la courbe est tracée, on peut chercher si elle ne présente pas de ressemblance avec quelque courbe connue d'équation simple ne renfermant qu'un petit nombre de paramètres. Si la ressemblance est suffisante, on a ainsi une représentation *analytique* de la série des fréquences. Son importance² vient de ce que l'on remplace ainsi la masse énorme des chiffres observés par une équation simple facilement maniable. De plus, l'outil mathématique si fécond dans toutes les sciences peut être utilisé.

§ 8. Types de courbes de fréquences. — On distingue en général quatre types³ :

Dans un premier type, les courbes sont symétriques, c'est le cas général en biométrie (mesure des tailles, etc.) de part et d'autre de la moyenne, à des distances égales, les fréquences sont les mêmes. Ce n'est jamais, ou à près, le cas en économie politique.

1. On doit reconnaître que l'on appelle ainsi aussi bien les courbes x donnant y en fonction de x que celles qui donnent f . Cela n'a aucun inconvénient dans la pratique.

2. « Les procédés mathématiques sont d'une importance capitale dans de nombreuses parties du domaine de la statistique. » (Bowley.) « Il n'est plus nécessaire de fournir des arguments pour justifier le rôle des mathématiques en statistique. » (M. Huber.), etc.

3. Par exemple, Aftalion, p. 10; Jordan, p. 204.

Un deuxième type comprend les courbes *légèrement asymétriques à un maximum*, c'est le cas, nous le verrons, des statistiques de salaires, ce type se rencontre fréquemment en économie politique.

Toutes les statistiques fiscales sont du troisième types : courbes *très fortement asymétriques ou hyperboliques* (revenus, capitaux, entreprises classées d'après leur personnel, etc.).

Le quatrième type est sans importance pour nous, c'est le *type en U* où les fréquences d'abord décroissantes deviennent après un minimum croissantes¹.

§ 9. Interprétation de la représentation analytique.

— L'équation de la courbe de fréquence n'est pas toujours obtenue d'une manière empirique, le raisonnement aidé par l'intuition permet souvent de *prévoir* la forme de l'équation. Nous verrons en particulier (chapitre IV) que le calcul des probabilités² a fourni un grand nombre de ces formules d'ajustement. Il est naturel de penser que le raisonnement est exact ou, tout au moins, est voisin de la vérité, quand la vérification expérimentale est bonne. La *formule* de la loi de l'effet proportionnel que nous présenterons au chapitre V donne ainsi naissance à la *loi* de l'effet proportionnel.

1. Jordan indique quelques exemples de ce type en météorologie : pour les fréquences des différents degrés de nébulosité, la courbe a deux maxima ($x = 0$, ciel sans nuages, et $x = 1$, ciel complètement couvert) séparés par un minimum.

2. « Les probabilités ne se rattachent pas seulement à la statistique comme l'arbre à la vigne dont il supporte les branches; il y a aussi un entrelacement de racines, une liaison des premiers principes qu'il est difficile de disséquer » (Edgeworth). Sur l'application du calcul des probabilités à la statistique (*B. I. I. S.*, XVIII, I, p. 220).

CHAPITRE II

LES GRANDEURS SIGNIFICATIVES D'UNE REPARTITION

§ 1. **Leur classement.** — On peut les diviser en deux grands groupes, suivant qu'elles tiennent compte de l'ordre de grandeur des éléments de la répartition ou non. Nous allons les passer rapidement en revue, en indiquant leurs caractères propres et leur intérêt particulier.

§ 2. **Grandeurs dépendant de l'ordre des éléments.** — Nous rangeons toutes les données de l'observation par ordre de grandeur, celle qui se trouve à moitié chemin est la *médiane*. Au quart et aux trois-quarts on a les *quartils*, on peut définir de même les *décils* et les *centils* aux différents dixièmes ou centièmes de la répartition. La médiane et ses généralisations sont très faciles à déterminer, soit par comptage, soit graphiquement¹, même lorsque les données sont incomplètes. Ainsi les statistiques de salaires donnent rarement des renseignements précis sur les extrémités de la répartition, la médiane sera déterminée cependant avec toute la précision voulue.

1. On construit comme au chapitre précédent la courbe représentant le nombre d'éléments où le caractère mesuré est supérieur à x , l'ordonnée correspondant à la moitié du nombre total d'éléments fournit la médiane, etc.

§ 3. On peut aussi noter la place de l'ouvrier (s'il s'agit d'une statistique de salaires) tel que le total des sommes distribuées au groupe considéré se répartisse également entre les ouvriers moins payés et les ouvriers plus payés que lui, on a ainsi la valeur *médiale* des salaires. On définit de même le 1^{er} et le 2^e *quartal* correspondants aux quarts des sommes distribuées.

Ces grandeurs, médiale, quartal..., introduites récemment par M. March¹ ne paraissent pas utilisées, elles exigent, contrairement à la médiane, la connaissance complète de la distribution.

Le *mode* est la valeur de la variable qui est le plus souvent répétée. C'est une position de plus grande densité. Lorsque la variable est susceptible de varier de manière continue, c'est l'abscisse du maximum. Sa détermination est souvent difficile, surtout lorsque le nombre des intervalles est grand. On peut alors employer une méthode d'approximation assez complexe², mais cela en vaut rarement la peine. Il est toujours mal connu. Son intérêt vient de ce qu'il indique le résultat le plus commun. Depuis longtemps, on a dit que le nombre le plus utile à un tailleur en confection ou à un cordonnier serait le mode et non la moyenne. dans une élection, l'opinion qui correspond au mode triomphe etc...

§ 4. Grandeurs indépendantes de l'ordre des éléments.

— La plus simple et la plus commune est la *moyenne arith-*

1. *Journal de la société de statistique de Paris*, 1928, p. 38.

2. On trouve son exposé dans l'ouvrage de M. Bowley (p. 125). On verra plus loin (chapitre II, 2^e part.) une statistique donnant le nombre d'ouvriers par catégorie de salaires pour l'industrie du coton. Il y a 16 maxima dont 9 correspondent à des salaires multiples de 5 shillings et sont dus sans doute à l'attrance du nombre rond dans les déclarations. Si on étudie avec soin les autres, on verra qu'il n'y a qu'un seul mode avec trois bosses, 20-21; 22-23; 24-25. On se trompera peu en admettant un mode pour 22.5.

métique, caractéristique très stable, dépendant peu des erreurs sur les fréquences¹. On utilise aussi la *moyenne géométrique* (racine nième du produit des n mesures du phénomène), la *moyenne harmonique* (dont l'inverse est la moyenne arithmétique des inverses des grandeurs). La première est indispensable lorsque les phénomènes suivent une loi exponentielle et que l'on utilise une représentation logarithmique². La seconde est intéressante dans les questions de change. A la Bourse de Londres, les monnaies étrangères sont cotées par la quantité qui correspond à une livre. Si le franc cote 125, 126, 123, 124, la moyenne arithmétique étant 123, la moyenne harmonique du franc sera $\frac{1}{123}$.

§ 5. Les *moments* sont des généralisations de la moyenne arithmétique. Soit une variable prenant y_1 fois la valeur x_1 , y_2 fois la valeur x_2 , y^n fois, x_n , les moments successifs d'ordre 2, 3, ... k , sont les moyennes arithmétiques des valeurs de x^2 , x^3 , x^k , c'est-à-dire

$$m'_2 = \frac{\sum x^2 y}{\sum y}; m'_3 = \frac{\sum x^3 y}{\sum y}; \dots m'_k = \frac{\sum x^k y}{\sum y}$$

Ces grandeurs dépendent de l'origine prise pour la variable, aussi on convient de les rapporter à la moyenne arith-

1. Parfois on connaît mal les valeurs $y_1, y_2, \dots, y$ des nombres d'éléments correspondant à $x_1, x_2, \dots, x_n$. L'expérience montre qu'on obtient pour la moyenne des valeurs très voisines, même si les valeurs estimées des y varient beaucoup (ceci se rattache à la question des moyennes pondérées).

2. L'étude des variations du niveau général des prix en France pendant la période troublée d'après-guerre fournit un excellent exemple. (*Théorie des phénomènes monétaires*, Rueff, p. 333.) M. Jordan montre (*Statistique mathématique*, p. 163) comment ces questions de moyenne se relient à l'étude de l'impôt, l'écart arithmétique est constant, si l'impôt est égal pour tous; c'est l'écart géométrique si l'impôt est proportionnel et l'écart harmonique constant donne un certain système d'impôt progressif.

métique prise pour origine¹. Lorsqu'on les calcule à partir d'une répartition réduite à quelques tranches, on obtient des valeurs trop grandes pour les moments d'ordre pair puisque l'on confond les nombres d'une tranche avec le milieu de celle-ci. On peut corriger, sous certaines réserves, au moyen des formules de Sheppard². Le grand intérêt des moments vient du fait qu'en en prenant un nombre suffisant, on peut théoriquement remplacer la répartition par la suite des moments. Leur gros défaut réside dans leur manque de stabilité, il suffit de modifier imperceptiblement les extrêmes d'une répartition pour changer complètement leur valeur, surtout si l'ordre est élevé. Nous y reviendrons.

§ 6. Relation empirique entre le mode, la médiane et la moyenne. — Si le diagramme de la répartition était symé-

1. On utilise les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 = m'_2 - m_1^2 \\ m_3 = m'_3 - 3m_1 m'_2 + 2m_1^3 \\ m_4 = m'_4 - 4m_1 m'_3 + 6m_1^2 m'_2 - 3m_1^4 \end{array} \right.$$

m, m, m étant rapportés à la moyenne arithmétique, m_1 . Il y a théoriquement autant de moments que de nombres entiers, l'infinité « dénombrable » de ceux-ci ne détermine pas toujours, l'infinité « continue » qu'elle prétend représenter (problème de Stieltjes). Les travaux de Carleman sur les fonctions quasi-analytiques résolvent complètement la question. Il faut qu'une série

de terme général $\frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}}$ soit divergente.

2. Les voici :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 = m_2 - \frac{1}{12}h^2 \\ M_4 = m_4 - \frac{1}{2}m_2h^2 + \frac{7}{240}h^4 \end{array} \right. \quad h \text{ largeur de la tranche}$$

Les hypothèses nécessaires à leur démonstration ne sont pas, vérifiées pour la formule de Laplace.

Le calcul des moments d'une répartition étant très fastidieux, on a inventé diverses méthodes pour le simplifier. Nous signalerons celle de Hardy-Lidstone, utile quand on ne dispose pas de machines à calculer (Elderton, *Frequency curves and correlation*, p. 22).

trique, mode, médiane et moyenne seraient confondus. Or nous avons vu que les répartitions économiques n'étaient presque jamais de ce type, l'observation de nombreux cas a donné la relation *empirique* suivante $M_0 + 2A = 3M$. M_0 mode; A moyenne arithmétique; M , médiane¹.

§ 7. **Dispersion et solidarité.** — La façon dont les éléments du groupe s'écartent de l'élément central quelle que soit la définition de celui-ci est souvent très intéressante à étudier et par conséquent à mesurer. L'idée la plus simple consiste à considérer *l'écart moyen* moyenne des valeurs absolues des écarts avec la médiane ou encore, *l'interquartil*, différence entre les quartils (il comprend la moitié des éléments) et corrélativement *l'interquartial*. Mais en général on préfère *l'écart quadratique* ou *Standard deviation* : racine carrée du moment d'ordre deux. Son carré est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne arithmétique. Ce choix vient d'un résultat du *Calcul des probabilités*, montrant que l'importance d'un écart dépend de son carré. Cet écart quadratique dépend de l'unité de mesure employée pour l'élément du groupe. Pour pouvoir comparer des ensembles divers d'éléments, nous utiliserons le rapport de la moyenne arithmétique à l'écart quadratique, que

1. La loi de *l'effet proportionnel* que nous proposerons plus loin permet de démontrer mathématiquement cette relation jusqu'ici empirique. Nous attachons une grande importance à ce résultat. L'ensemble des statistiques connues et étudiées est utilisé d'un seul coup.

Signalons, pour le lecteur curieux de mathématiques, que Dunham Jackson a donné une définition commune ces trois grandeurs. Soit

$$\sum |x_i - z|^k y_i$$

désigne la valeur absolue.

Déterminons la valeur S_k de Z rendant cette somme minimum. Les limites de S_k quand k tend vers 0, 1, 2 sont le mode, la médiane et la moyenne arithmétique (*Bulletin of the American Mathematical Society*, XXVII).

M. Jordan dans l'ouvrage cité, introduit les *moments factoriels* où on utilise les moyennes de $x(x-1)\dots(x-k+1)$. Ils donnent parfois des formules plus simples.

nous appellerons *indice de solidarité*. Il représente bien celle-ci puisqu'il croît quand les éléments se rapprochent les uns des autres et inversement.

§ 8. Pour montrer toute son importance et alléger un peu cette exposition, nous allons en faire quelques applications : solidarité des prix, des salaires, des taux d'intérêt

§ 9. M. Dugé de Bernonville, dans son étude sur *la variation des prix en France depuis la stabilisation des changes*¹, utilise un indice général des prix de gros faisant intervenir 126 cotations, chaque article étant affecté d'un coefficient de pondération proportionnel à la valeur des échanges pendant l'année de base 1913. L'examen des indices par groupes de marchandises lui paraît montrer que la dispersion des prix s'est accrue en 1927 pour se réduire ensuite. Voulant préciser cette impression, il a calculé l'écart quadratique à des époques successives, rapporté à la moyenne, c'est-à-dire l'inverse de l'indice que nous proposons.

Tableau I. — **Solidarité des prix de Gros.**

Epoque		M	I
1926	Janvier	605	3,00
	Avril	625	3,08
	Juillet	785	2,68
	Octobre	742	3,83
1927	Janvier	617	4,17
	Avril	615	3,94
	Juillet	599	3,71
	Octobre	587	3,47
1928	Janvier	593	3,53
	Avril	596	3,55
	Juillet	592	3,59
	Octobre	598	3,63
1929	Janvier	622	3,53
	Avril	600	3,38

M Moyenne de 98 séries de prix.

I Indice de solidarité de cette série.

1. *Bulletin de la Statistique générale de la France*, XVIII, p. 432.

En remplaçant *dispersion* par *solidarité* et en changeant le sens des mouvements, on vérifie les conclusions de M. de Bernonville. L'indice de solidarité montre le profond déséquilibre des prix en 1926 et la rapide concentration provoquée par le rétablissement de la situation monétaire à partir de juillet. La solidarité diminue à partir de janvier 1927, ce qui semble montrer qu'elle était anormale à ce moment. La baisse de l'indice en janvier 1929 est l'indice d'un trouble. M. de Bernonville ajoute que ceci ne vérifie « nullement la règle énoncée par plusieurs auteurs : à savoir que le coefficient de dispersion suit toujours le mouvement de l'indice général ». Il est nécessaire d'insister sur le fait *remarquable* de la *stabilité* de ce coefficient, car *a priori*, on pourrait lui refuser une valeur, si petite soit-elle, si son calcul était influencé par les variations accidentelles d'un élément; il ne doit dépendre que du mouvement d'ensemble et ce premier exemple le montre.

§ 10. Nous venons de chiffrer la solidarité des prix des diverses marchandises, nous pouvons de même étudier celle des prix d'une même matière en *différents lieux*. Pour éviter des variations accidentelles trop fortes, nous prendrons l'indice des *prix de détail* de la S. G. F. obtenu par pondération des indices de 13 articles suivant les *consommations annuelles* d'une famille de quatre personnes,

Deux seulement de ces treize articles n'étant pas des denrées alimentaires (pétrole et alcool à brûler), cet indice est « un indice approximatif du coût de l'alimentation d'une famille ouvrière ». Cet indice est calculé pour les chef-lieux de départements et pour les villes de plus de 10.000 habitants¹.

1. *Bulletin de la S. G. F.*, tous les numéros trimestriels depuis 1923. Par raison d'homogénéité, nous avons éliminé la région parisienne, nous avons agi de même pour les salaires que nous étudierons tout à l'heure.

Tableau II.

Solidarité des prix de détail dans l'espace

Epoque	M	I
1913 Février	1.020	14,8
1923 Novembre	3.749	16,6
1924 Février	4.013	
Mai	3.946	14,9
Août	4.013	
Novembre	4.280	16,3
1925 Février	4.423	18,6
Mai	4.348	18,6
Août	4.515	17,8
Novembre	4.713	17,8
1926 Février	5.034	19,5
Mai	5.229	19,4
Août	6.102	18,2
Novembre	6.472	20,5
1927 Février	5.863	19,8
Mai	5.719	17,4
Août	5.530	
Novembre	5.261	16,9
1928 Février	5.222	
Mai	5.302	16,7
Août	5.359	16,8
Novembre	5.620	
1929 Février	5.763	16,1
Mai	5.834	
Août	5.824	17,0
Novembre	5.931	
1930 Février	5.835	17,6

M. Moyenne pour les 265 villes.

I. Indice de solidarité.

L'indice est encore très stable (il varie de 14,9 à 20,5) bien que la moyenne des indices ait varié de 1 à 6. Le maximum de solidarité se place en novembre 1926, maximum de la courbe des prix. Une élévation rapide des prix provoque le resserrement des indices autour de leur moyenne et une baisse leur écartement. Janvier 1929 correspond à un minimum. Nous observons ici exactement l'inverse de ce que M. de Bernonville avait constaté pour les prix des diverses marchandises de gros. Ce n'est pas ici le lieu de rechercher les causes de ce résultat curieux. Si on veut bien

y réfléchir, il n'y a rien de contradictoire, les variations dans l'espace et dans la nature de la marchandise ne doivent pas suivre les mêmes lois.

§ 11. La solidarité des *salaires* peut s'étudier de la même manière, les statistiques s'y prêtent moins bien, car elles sont faites à époques plus éloignées. Depuis 1924, la S. G. F. adresse aux Conseils de prud'hommes et aux maires des chefs-lieux de département où ne fonctionne pas de Conseil de prud'hommes, un questionnaire relatif aux salaires *courants* horaires de certaines catégories d'ouvriers en octobre. Parmi les 50 professions visées, nous avons choisi celle des terrassiers, parce qu'elle figure sur presque toutes les réponses aux questionnaires¹. On voit qu'en octobre 1926 la solidarité était maximum. Nous retrouvons le résultat précédent pour les prix de détail, il s'agit ici aussi de la variation dans l'espace. On remarquera encore la *stabilité* de cet indice, stabilité qui prouve l'existence d'une grandeur attachée au phénomène.

Tableau III. — **Solidarité des salaires dans l'espace**

Epoque	M	I
1924	2,30	4,6
1925	2,50	5,3
1926	3,00	5,9
1927	2,95	5,6
1928	3,15	5,7
1929	3,45	5,7

M. Moyenne des salaires en francs.

I. Indice de solidarité.

1. La moyenne est prise pour 186 villes. Voici quelques indices qui permettent d'apprécier les variations de la solidarité dans l'espace et le temps. Salaires déclarés par l'*Amalgamed Society of Engineers* :

moyenne (shillings)	en 1862	27.94	en 1891	31.50
indice de solidarité	»	—	9.1	» — 11.3
il est très élevé (influence syndicale ?)				
Domestiques et gens de maison (France 1912) :				
Bonnes à tout faire	moyenne	365 fr.	indice	4.5
Cuisiniers	—	1475	» —	2.7

§ 12. M. Ansiaux, dans son *Traité d'économie politique*, a vivement insisté sur la solidarité des taux d'intérêt. L'indice va permettre de la chiffrer. M. L. J. Loutchitch dans son ouvrage *Des variations du taux de l'intérêt*, a (p. 121) utilisé la *standard deviation*. Pour la période qui s'étend de 1870 à nos jours, il considère 5 taux : escompte de la Banque de France, rente 3 % perpétuelle, valeurs mobilières à revenu fixe et à revenu variable, taux effectif d'émission des émissions d'obligations P. L. M. C'est évidemment très peu pour calculer un écart quadratique, mais il faut s'en contenter en première approximation. Le taux moyen résultant étant donné (p. 54), il est facile de calculer l'indice par un rapport.

Tableau IV. — Solidarité des taux d'intérêt (M Moyenne. I Indice)

Année	M	I	Année	M	I	Année	M	I
1870 ...	4,68	12,7	1890 ...	3,64	5,6	1910 ...	3,48	8,5
1 ...	5,54	50	1 ...	3,57	6,3	1 ...	3,59	8,7
2 ...	5,88	8,0	2 ...	3,46	5,3	2 ...	3,64	8,7
3 ...	5,80	12,2	3 ...	3,42	4,9	3 ...	3,92	11,9
4 ...	5,49	6,5	4 ...	3,38	4,8	4 ...	4,08	18,5
5 ...	5,17	5,5	5 ...	3,15	4,8	5 ...	4,68	10,0
6 ...	4,89	4,5	6 ...	2,96	6,2	6 ...	4,91	8,5
7 ...	4,61	3,2	7 ...	3,02	4,8	7 ...	5,05	6,3
8 ...	4,09	4,0	8 ...	3,30	3,6	8 ...	4,98	8,5
9 ...	3,96	4,9	9 ...	3,35	9,4	9 ...	4,94	5,2
1880 ...	3,92	5,3	1900 ...	3,47	9,1	1920 ...	5,38	3,9
1 ...	4,14	5,3	1 ...	3,34	9,3	1 ...	5,94	3,9
2 ...	4,23	5,4	2 ...	3,46	8,9	2 ...	5,56	4,6
3 ...	4,18	6,2	3 ...	3,43	8,2	3 ...	5,47	4,3
4 ...	4,16	6,0	4 ...	3,52	6,7	4 ...	5,95	4,0
5 ...	4,07	5,9	5 ...	3,41	8,1	5 ...	7,13	3,0
6 ...	3,97	6,0	6 ...	3,45	6,3	6 ...	7,32	2,6
7 ...	3,97	6,0	7 ...	3,70	8,0	7 ...	6,21	2,8
8 ...	3,93	6,7	8 ...	3,56	10,4	8 ...	5,75	3,4
9 ...	3,88	6,5	9 ...	3,48	8,3	9 ...	5,50	3,5

M. Loutchitch a fait l'étude de la dispersion à l'aide de l'écart quadratique, nous allons la reprendre rapidement

avec l'indice qui nous semble plus approprié¹. La solidarité est maximum pendant les guerres de 1870 et de 14-19, le taux d'avances à l'Etat domine le marché, les différents taux convergent presque. Nous allons voir que l'indice suit en général *le mouvement cyclique économique* et qu'à une hausse des prix correspond souvent une augmentation de la solidarité et inversement.

1870-73 Hausse des prix, forte solidarité.

1873-78 : Crise mondiale de faible répercussion en France, baisse profonde des prix, baisse de l'indice (1877 correspond au minimum de la solidarité de 1870 à 1920).

1878-81 : Reprise des affaires, prix stationnaires, légère reprise de l'indice.

1881-86 : Crise de 1881-82 dont la liquidation se produit jusqu'en 1886.

1886-90 : Reprise de l'activité des affaires et des prix, légère montée de l'indice jusqu'en 1889.

1890-95 : Crise de 1890 (vin), la liquidation dure jusqu'en 1895-96, l'indice baisse régulièrement jusqu'en 1896.

1895-1900 : Développement des affaires très important, hausse des prix, l'indice monte sans arrêt et atteint en 1899 le chiffre élevé de 9, 4.

1900-03 : Crise de 1900 liquidée en deux ou trois années, baisse peu importante des prix et indice minimum 6,3 en 1903).

1903-13 : Période de prospérité et de développement des affaires coupée par la crise de 1907 très marquée mais

1. Ainsi de 1873 à 1913. M. Loutchitch (p. 127) indique seulement : « Un phénomène de convergence s'effectuant par des oscillations de plus en plus amorties. La crise de 1898 provoque une brusque dispersion qui, de nouveau s'amortissait en oscillations plus ou moins lentes en corrélation avec des phénomènes des crises et de redressement qui a eu lieu jusqu'en 1913. » On peut préciser comme on verra au texte.

rapidement limitée, hausse importante des prix jusqu'en 1912, coupée par une notable dépression en 1908-09. Hausse de l'indice jusqu'en 1908, baisse brusque, puis hausse ininterrompue jusqu'à la guerre.

Avant la guerre le fait paraît certain, *dans l'essor, la solidarité des taux d'intérêt augmente, dans la dépression les taux divergent*. Nous n'en étudierons pas les causes dans cette étude objective.

§ 13. La période d'après-guerre nous montre une baisse continue de l'indice, les taux divergent de plus en plus, l'année 1926 est sans précédent à ce sujet; l'instabilité financière intensifie les causes de différenciation, primes de risque, liquidité, etc... On assiste depuis à une lente reprise qui semble s'accélérer. Pour le faire voir, nous avons calculé des grandeurs analogues aux précédentes à l'aide des taux indiquées par le *Bulletin Mensuel de la S. G. F.*: escompte de la B. D. F., taux net moyen des valeurs à revenu fixe, à revenu variable et des obligations émises pendant le mois, taux de la rente 3 %. Les chiffres indiqués pour 1928 et

Tableau V

Solidarité des taux d'intérêt (1928-1929)

Epoque	M	I
1928 Moyenne	4,40	3,67
1929 »	4,08	4,28
1929 Mars	4,18	3,53
Juin	4,18	4,33
1930 Janvier	3,59	4,70
Juin	3,53	5,20
Septembre	3,57	4,95

M Moyenne; I Indice

1929 (moyenne de l'année) différent de ceux que nous avons tirés des travaux de M. Loutchitch. Cela tient au

mode de calcul. On voit cependant que la baisse continue du taux moyen est accompagnée d'une reprise de la solidarité qui s'accroît les derniers mois.

Ceci doit être rapproché des paroles de M. Dessirier, dans ses « *Prévisions statistiques des mouvements de bourse* » (*Journal de la Société de statistique de Paris*, 1928, p. 171). « La dispersion actuelle (juillet 1928) des divers taux d'intérêt est un fait frappant. L'on verra très vraisemblablement, dans la période qui s'ouvre, se resserrer l'écart entre les différents taux, le mouvement peut être beaucoup plus rapide qu'on ne le croit communément¹. »

§ 14. Le lecteur nous pardonnera cette longue parenthèse. En dehors même de l'intérêt que peuvent présenter ces courtes monographies, nous avons voulu le convaincre que ces grandeurs significatives de définition *mathématique* correspondent à une réalité et peuvent donner lieu à des études aussi attachantes que les autres. La stabilité des nombres qui les mesurent est pour nous le critérium presque infaillible de leur intérêt.

§ 15. **Autres grandeurs significatives.** — L'étude d'une répartition complexe serait incomplète si on s'en tenait aux grandeurs précédentes. Il faut aussi apprécier les différences, et mesurer l'*inégalité* des éléments. Il y a là une question encore ouverte et fort difficile, nous la traiterons dans son ensemble, plus tard (chapitre VII)

1. Cette étude des taux d'intérêt, au moins depuis la fin de la guerre ne justifie pas l'affirmation de M. Ansiaux (*Traité*, II, XI) : « En somme les écarts entre les divers taux d'un intérêt simultané ne sont pas considérables » ou « le degré *étonnant* auquel est parvenue la solidarité des taux d'intérêt à notre époque. »

Résumé : les grandeurs significatives les plus importantes sont la moyenne, la médiane et l'écart quadratique. Nous utiliserons parfois les quartils¹.

1. M. March, pour une distribution de salaires d 13.000 ouvriers métallurgistes des Etats-Unis en 1890, utilise *vingt-six* grandeurs significatives. (*Journal de la société de statistique de Paris*, 1928, p. 59.)

CHAPITRE III

L'AJUSTEMENT MATHÉMATIQUE A PRIORI

§ 1. **Méthode générale.** — Nous avons vu comment une répartition observée permettait de définir une *courbe de fréquence*. Un des problèmes les plus importants de la statistique mathématique recherche une représentation mathématique de la fonction correspondante. Sa résolution facilite beaucoup l'étude de la répartition et de ses variations dans l'espace et dans le temps¹. La méthode générale utilise une équation comportant un certain nombre de constantes, choisies de façon que la courbe correspondante s'adapte le mieux possible au diagramme des observations. Il y a donc deux étapes, la recherche de la *forme* de la fonction et la détermination des *constantes* qui y rentrent. Nous rejeterons dans le chapitre suivant, les formules dérivant, à un titre quelconque, du calcul des probabilités.

§ 2. **Application immédiate des théories mathématiques.**
— On cherche, pour la fonction de fréquence, un *polynôme*

1. « Il est, en effet, très difficile d'exprimer par une formule mathématique un phénomène économique et social et le fait d'y réussir constitue presque toujours un progrès important », M. le baron Mourre. (*Journal de la société de Statistique de Paris*, 1922, p. 215.)

en x de degré suffisamment élevé, cette méthode généralise l'ajustement par une droite. Les calculs deviennent rapidement compliqués et malgré toutes les modifications et tous les perfectionnements que l'on a apportés à cette méthode, les résultats obtenus en statistique sont très insuffisants¹.

§ 3. **Méthode de Pearson.** — L'échec des méthodes précédentes montre la nécessité de trouver des équations s'adaptant à la nature spéciale des répartitions. Le célèbre statisticien, le professeur Pearson, a donné un système de courbes représentant d'une manière satisfaisante de nombreuses répartitions statistiques. Il est très utilisé surtout dans les pays de langue anglaise² et nous ne saurions méconnaître son importance. Il introduit sept *types* de courbe à quatre constantes³, le type étant déterminé par les valeurs

1. Le polynôme est donné par la formule de Lagrange, la forme irrégulière obtenue pour la courbe répond mal au sentiment de continuité. Les polynômes d'*Hermite* contiennent en facteur e^{-x^2} second membre de l'équation de Laplace que nous verrons plus tard; malgré cela, dès qu'ils contiennent trois termes, ils ne sont plus pratiquement utilisables. Nous signalerons encore les polynômes de *Legendre* et ceux de *Jordan* (polynômes q) qui généralisent ceux de *Tchebytschef*. Les polynômes G de *Jordan* sont très intéressants théoriquement quand la fonction ne peut être définie que pour certaines valeurs de la variables. (Voyez aussi le chapitre *Statistique, Calcul des probabilités*, E. Borel, t. I, fasc. I.)

2. Cependant, M. March les a souvent utilisées pour les répartitions de salaires. La statistique des assurances sociales russes à Moscou, s'en est servie pour des travaux relatifs aux revenus des paysans, ouvriers et employés russes. (Simionov, *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1929, p. 301.)

3. En réalité, la méthode de Pearson n'est pas absolument *a priori*. Elle part de l'étude des tirages de boules dans une urne et obtient par un passage à la limite assez naturel, une équation différentielle à quatre constantes :

$$\frac{y'}{y} = \frac{a + x}{b + cx + dx^2}$$

Cependant ces paramètres n'ont pas une entière généralité et ce n'est que par une extension assez hardie que Pearson les considère comme quelconque (Voyez sa discussion dans *Biometrika*, t. XIII, *The fundamental problem of practical statistics.*)

admises pour les constantes, au moyen du *principe des moments*¹. Les quatre premiers moments (le premier est la moyenne arithmétique) doivent être égaux à ceux de la série d'observations. Or nous avons indiqué que les moments d'ordre élevé ne sauraient inspirer confiance, ils manquent de stabilité, le moment d'ordre 4 est déjà fortement influencé par les grandes valeurs de la variable. On a, en général, une suite de répartition de même nature, leur représentation doit conduire à des fonctions de fréquence de même type, ce n'est souvent pas le cas comme nous le verrons. Enfin l'automatisme de la méthode rend le contrôle difficile². On a proposé de généraliser ce sys-

1. Voici l'énoncé le plus précis du principe des moments (M. E. Borel, *Calcul des probabilités*, t. I, fasc. I, p. 122) : « Etant donné un nombre limité de moments, chercher une fonction non décroissante, en escalier, et définie pour les valeurs positives de x qui admette ces moments. » Ceci se rattache à tout un important groupe de travaux sur le problème de Stieltjes. (Polya, Markov, Carleman...)

2. L'intégration de l'équation différentielle conduit, suivant la valeur des constantes, à trois solutions à quatre paramètres indépendants; pour des valeurs particulières on obtient trois autres solutions à trois paramètres et une à deux. On a donc en tout les sept *types de Pearson* utilisables pour les courbes à *mode unique*. Voici leur énumération avec les exemples traités dans cet ouvrage :

(I)

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{ma_1} \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{ma_2}$$

Indices des prix de détail en France 1913, février (I, III, 6). — Taux de paupérisme des unions anglaises (I, III, 7). — Salaires anglais (I, IV, 8).

(II)

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

Indice des prix de détail en France 1925 (I, III, 6).

(III)

$$y = y_0 e^{-\gamma x} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Dépenses familiales de nourriture (I, V, 4) — utilisé dans la thèse de Lenoir sur *la formule et le mouvement des prix* — type introduit en 1896 par l'anthropologiste Otto Ammon pour l'étude des *revenus*, utilisé par March et Pareto.

tème, nous n'y insisterons pas¹.

§ 4. **Les équations de Pareto.** — Elles sont purement empiriques et relatives à la répartition des revenus. Traçons deux axes. Sur l'un, portons les logarithmes du revenu x ; sur l'autre, les logarithmes du nombre N des contribuables ayant un revenu supérieur à x . Nous sommes tout de suite frappé du fait que les points ainsi déterminés, ont une tendance très marquée à se disposer en ligne droite. » (Pareto, *Cours d'économie politique*, éd. 1897, t. II, p. 304.) D'où la loi mathématique : $N = \frac{A}{x^\alpha}$.

Pareto a lui-même généralisé cette loi de la manière suivante : $N = Ax^{-\alpha}e^{-\beta x}$ et $N = A(x + a)^{-\alpha}e^{-\beta x}$, introduisant ainsi deux, puis trois, et enfin quatre constantes arbitraires. Dans un seul cas, celui du duché d'Ol-

(IV)

$$y = y_0 e^{-\text{parctg} \frac{x}{a}} \left[1 + \frac{x^2}{a^2} \right]^{-m}$$

Salaires horaires des ouvriers terrassiers (France) 1925-26 (I, IV, 8).

(V)

$$y = y_0 x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}}$$

Utilisé par M. March pour les répartitions de salaires.

(VI)

$$y = y_0 (x - a) q_2 x^{-q_1}$$

La loi de l'*effet proportionnel* que nous proposerons plus tard est, en général de ce type, avec comme limites III et V (*Annexe C*, § 9).

(VII)

$$y = e^{-\frac{x^2}{c}}$$

Type dit, de la *courbe normale*, provenant du tirage dans une urne.

1. Il suffit de considérer l'équation différentielle $\frac{y'}{y} = \frac{x + a}{F(x)}$; $F(x)$

étant un polynôme de degré supérieur à deux, on peut aussi compliquer le numérateur. Romanovsky a procédé différemment, mais cela ne paraît pas avoir d'intérêt pratique (applications cependant dans *Biometrika*, t. XVIII, Wishart).

denbourg, Pareto a trouvé une valeur appréciable pour α et β paraît en général négligeable. On se trouve donc ramené à l'équation simple : $N = \frac{\Lambda}{x^\alpha}$. Cette découverte est remarquable; elle a permis, pour la première fois de définir d'une manière précise l'inégalité des revenus et malgré les imperfections des définitions de Pareto, celui-ci a pu obtenir, à partir de cette formule, des résultats très importants sur la répartition des richesses. Nous y reviendrons longuement. Les constantes étaient déterminées par la méthode d'interpolation de Cauchy, ou même simplement par une méthode graphique¹. Cette dernière nous paraît la meilleure, car elle est plus commode et très suffisante.

§ 5. **La représentation de M. Frechet.** — M. Frechet, de l'université de Strasbourg, a proposé récemment (*Bulletin de l'Institut international de statistique*, t. XXII, fasc. 3 p. 547) une généralisation de la loi de Pareto. Il part du fait que, ce qui importe au point de vue des applications, c'est de prévoir le montant total R de tous les revenus supérieurs à x , et cela soit en fonction de N, soit en fonction de x . La formule simple de Pareto, $N = \frac{\Lambda}{x^\alpha}$ permet, par une simple intégration, de fournir le résultat demandé, mais l'approximation donnée par cette formule ne peut donner qu'une idée de l'ordre de grandeur des quantités à prévoir.

1. Une étude complète de certains procédés d'ajustement (moindres carrés, méthode de Cauchy, principe des moments) a été faite au point de vue statistique par M. March. (*Journal de la Société de statistique de Paris*, 1898, p. 205.) Nous employons ici systématiquement la méthode graphique dont l'approximation est toujours suffisante et qui est facile à appliquer. On remarquera que la formule de Pareto donne pour la répartition, des moments infinis à partir du troisième, car α est inférieur à 2. Elle donne en ef-

fect $y = \frac{\Lambda \alpha}{x^{\alpha+1}}$.

(Nous le vérifierons.) Les formules plus complexes sont plus précises évidemment, mais ne se prêtent pas à l'intégration qui fournirait *explicitement* R en fonction de N ou de x . Enfin, ajoute M. Frechet dans sa brève communication, « ces formules ont un type *rigide* qui ne s'adapte pas aussi bien à des répartitions analogues comme la répartition des fortunes, celle des villes suivant leur importance, etc... » La méthode qu'il propose sur la remarque que le quotient $\frac{R}{Nx}$ est constant pour la loi simple de Pareto. Il représente le rapport de la moyenne des revenus supérieurs à x à la valeur de ce revenu x . La loi simple de Pareto étant approximativement exacte, ce quotient *variera peu* et on pourra déterminer une fonction de N , qui représente bien la variation de l'inverse de ce quotient et qui, considérée comme fonction du logarithme de N , soit intégrable facilement.

On peut, dans ces conditions, trouver la valeur explicite de R en fonction de N et celle de N en fonction de x^1 .

Il n'a point été fait d'applications de cette méthode, à notre connaissance. Elle conserve le défaut des lois de

1. M. Frechet indique pour référence de ses calculs la *Revue générale des Sciences*, 1926. Nous avons consulté la collection de cette revue sans succès. Il est heureusement facile de reconstituer le raisonnement.

Avec les définitions précédentes, on voit immédiatement que le nombre des individus de revenu compris entre x et $x + dx$ est $-\frac{dN}{dx} dx$. Par suite

$$\text{on a : } R = \int_0^N x \cdot dN \text{ d'où } \frac{dR}{dN} = +x.$$

Soit $u = \log N$, si on pose, en suivant M. Frechet $\frac{Nx}{R} = f(u)$ on aura :

$$\frac{dR}{dN} = +f(u) \frac{R}{N} \text{ ou } \frac{dR}{R} = f(u) du$$

On a donc finalement, par intégration le système suivant qui résout le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = Ae^{+f(u)} = g(u) \\ x = e^{-u} g'(u) \\ u = \log N \end{array} \right.$$

Pareto, l'empirisme de la base, et il n'est pas certain, par suite qu'elle se prêterait, aussi facilement que le croit le savant mathématicien de la théorie des ensembles, à l'étude des répartitions analogues aux revenus.

Résumé : L'application directe des procédés mathématiques ne paraît pas réussir. Les types de Pearson sont trop compliqués pour l'économie politique et le principe des moments dangereux, peu stable. L'équation de Pareto et ses dérivées ont pour elles l'avantage de la simplicité. Nous verrons plus tard si elles s'adaptent suffisamment aux observations.

Tableau VI. — Application de la méthode des moments

Nombres indices des prix de détail en France (S. G. F., 1925, octobre)

Nombre indice	Calcul des moments					Ajustement		
	x	y	xy	x^2y	x^3y	x^4y	y (II)	y (VII)
3.900 à 4.000	— 8	3	— 24	192	— 1.596	12.288	1,2	0,8
4.000 à 4.100	— 7	1	— 7	49	— 349	2.401	2,2	2,2
4.100 à 4.200	— 6	5	— 30	180	— 1.080	6.480	4,9	5,1
4.200 à 4.300	— 5	9	— 45	225	— 1.125	5.625	9,6	10,2
4.300 à 4.400	— 4	19	— 76	304	— 1.216	4.864	17,1	17,9
4.400 à 4.500	— 3	22	— 66	198	— 594	1.782	26,5	26,9
4.500 à 4.600	— 2	36	— 72	144	— 288	576	35,5	35,1
4.600 à 4.700	— 1	44	— 44	44	— 44	44	40,8	39,5
4.700 à 4.800	0	44					39,9	39,0
4.800 à 4.900	+ 1	26	26	26	26	26	33,2	33,1
4.900 à 5.000	+ 2	25	50	100	200	400	23,8	24,3
5.000 à 5.100	+ 3	17	51	153	459	1.377	12,8	15,4
5.100 à 5.200	+ 4	10	40	160	640	2.560	8,0	8,6
5.200 à 5.300	+ 5	0	0	0	0	0	3,8	4,1
5.300 à 5.400	+ 6	1	6	36	216	1.296	1,7	1,7
5.400 à 5.500	+ 7	3	21	147	1.029	7.203	0,8	0,6
Totaux partiels		265	+ 194 — 364	+ 1.958	+ 2.570 — 6.226	+ 46.922		
Total		265	— 170	1.958	— 3.656	+ 46.922		

Moyenne A = 0,6415 0

m_2 = 7,388 68 m_2 = 6,977 16 M_2 = 6,893 83

m'_3 = 13,796 22 m_3 = 0,104 68 M_3 = 0,104 68

m'_4 = 177,064 1 m_4 = 159,398 3 M_4 = 155,938 9

les M sont les moments rapportés à la moyenne après correction de Sheppard.

Pour déterminer rapidement le type, Pearson introduit les deux rapports $B_1 = \frac{M_3}{M_2^2}$; $B_2 = \frac{M_4}{M_2^2}$ qu'il appelle *asy-métrie* et *voussure*.

$$\text{Puis un criterium } X = \frac{B_1(B_2 - 3)^2}{4(B_2 - 3B_1)(2B_2 - 3B_1 - 6)^2}$$

Le tableau permet suivant la valeur de X , de déterminer le type.

X	$-\infty$	O	I	$+\infty$
type	(III)	(I)	(IV)	(VI) (III)
		(VII) si $B_2 = 3$		
		(II) si $B_2 \neq 3$		

$$\text{Ici } \begin{cases} B_1 = 0,000\ 033 \\ B_2 = 3,2813 \end{cases} : X = -0,000\ 044$$

Nous adopterons le type (II)

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

Des formules (Elderton, *Frequency curves and correlation*) permettent de calculer les constantes :

$$m = 13,172; a = 12,685; y_0 = 41,425.$$

On peut aussi penser à utiliser le type beaucoup plus simple (VII). Les deux dernières colonnes du tableau donnent les valeurs calculées au moyen des formules. On voit qu'il est bien inutile de faire les calculs compliqués de la formule II. Or nous verrons que VII peut s'interpréter et facilement se discuter. *La comparaison avec la colonne des y réels* est satisfaisante.

CHAPITRE IV

L'AJUSTEMENT PAR LES FORMULES DU CALCUL DES PROBABILITES

§ 1. **Généralités.** — Dans le chapitre précédent, nous avons rencontré des formules sans lien les unes avec les autres et dont l'application ne se justifiait que par le succès. Ici au contraire, toutes les fonctions que nous allons voir, sont empruntées à une même discipline scientifique sans rapport, semble-t-il, avec l'économie politique, le *Calcul des probabilités*. Lorsque nous aurons énuméré ces formules, en montrant leurs caractères particuliers et leur intérêt propre pour le but que nous recherchons, il restera à voir si on ne peut tirer profit de cette correspondance étroite entre deux théories. En d'autres termes, nous considérons d'abord le *Calcul des probabilités* comme un réservoir d'heureuses formules, permettant une mise en ordre des résultats statistiques, puis nous rechercherons si ce succès n'a pas quelque raison cachée.

§ 2. **Les formules du calcul des probabilités.** — Nous ne pourrions nous borner à une énumération sèche, et il est nécessaire, pour remplir notre programme, d'avoir quelques notions sur leur signification. Tout repose sur la solution

du problème suivant. « Une urne contient des boules blanches et des boules noires. Les proportions sont p et q . On remet, après une extraction, la boule dans l'urne. On recommence l'opération, n fois. Quelle est la probabilité d'extraire 0, 1, 2, ... n boules blanches ? »

La probabilité, à chaque tirage, de tirer une blanche est p , une noire $q = 1 - p$. Celle de tirer d'abord r blanches, puis $n - r$ noires est d'après le principe des probabilités composées¹ $p^r q^{n-r}$. Mais on peut tirer r blanches au cours des n tirages, sans que cet ordre soit vérifié. On obtiendra donc la probabilité demandée en ajoutant² toutes celles qui correspondent aux différents ordres. Or il y en a un nombre égal à tous les arrangements différents que l'on peut former avec r boules blanches et $n-r$ boules noires. On désigne ce nombre par $\binom{n}{r}$. La probabilité demandée est donc $P(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$.

On appelle souvent cette formule *binômiale*, elle se retrouve en effet dans la théorie du binôme, dont $P(r)$ est un terme du développement.

§ 3. Admettons que nous fassions N séries de ces n tirages, et considérons pour chacune de ces séries le nombre des boules blanches sorties. Nous pourrions classer ces séries d'après ce nombre, obtenant une *répartition* tout à

1. Nous ne donnerons pas de définition de la probabilité. (Voyez les traités classiques de MM. Borel, Frechet, Levy, Darmois, Jordan, Bowley, Keynes, Cantelli, etc.). Ici une notion intuitive est préférable, la probabilité se mesure par le rapport du nombre des cas favorables à l'événement étudié, au nombre total des cas possibles, sa *propriété* fondamentale est d'être la moyenne des rapports observés. Le principe des probabilités composées affirme que, lorsqu'un événement dépend du concours de deux événements de probabilités indépendantes, sa probabilité est égale au produit des probabilités des deux événements. (Ceci résulte immédiatement de la *mesure* de celle-ci.)

2. Théorème des probabilités totales : si un événement peut se produire soit par l'arrivée d'un événement A, soit par l'arrivée de B et si les deux peuvent se produire simultanément sa probabilité est la somme des probabilités de A et de B.

fait semblable aux répartitions statistiques. On peut de même construire un diagramme en portant en abscisses le nombre r et en ordonnée le nombre de séries correspondantes. Nous pourrions aussi chercher les *grandeurs significatives* de cette répartition, médiane, mode, moyenne, moments, etc..., bref reprendre toutes les notions relatives aux répartitions statistiques¹.

Si les nombres n et r deviennent très grands, la formule *binômiale* devient très difficile à manier, la base du diagramme devient très grande. Les mathématiciens ont donc cherché à trouver des formules voisines plus commodes mais qui seront seulement approximatives.

Laplace a montré, que si p est voisin de $1/2$ on peut obtenir de bons résultats en utilisant la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

La courbe représentée par cette équation figure la courbe de répartition d'une manière satisfaisante, si on choisit convenablement l'échelle des abscisses et celle des ordonnées².

C'est la *courbe en cloche* ou *courbe normale*, parfaitement symétrique où la médiane, le mode, la moyenne sont confondues.

1. En 1926, il y avait, pour les 90 départements français, 17 villes de plus de 100.000 habitants. Imaginons une urne renfermant des boules contenant les noms des 90 départements. On fait 17 tirages en remettant chaque fois la boule tirée. Les probabilités, pour un département d'être tiré 0, 1, 2, fois peuvent se calculer à l'aide de la formule binômiale, soit 0,827; 0,158; 0,0142. Or il y a 75, 13, 2 départements ayant 0, 1, 2 villes de plus de 100 mille habitants, ce qui correspond à des probabilités 0,834; 0,145; 0,022 la formule binômiale ajuste donc bien cette répartition.

2. D'une manière précise, Laplace a montré que les points de coordonnées

$$x = \frac{r - np}{\sqrt{2npq}} \text{ et } y = P(r) \cdot \sqrt{2npq}$$

lorsque r augmente avec n de telle façon que $r - np$ croît comme n sont d'autant plus près de la courbe en cloche que n est plus grand. (On trouvera un exposé très concis dans le traité de Jordan.)

§ 4. On a généralisé, au moyen d'équations plus complexes, de façon à arriver à des courbes asymétriques, espérant ainsi se rapprocher de la formule exacte, même quand p est différent de $\frac{1}{2}$. *Laplace* a donné une formule à deux termes, *M. Charlier* utilise trois termes, *Edgeworth* quatre. *M. Jordan* a donné, la forme générale pour un nombre infini, mais quel que soit le nombre de termes, on n'obtient de résultats acceptables que si p est voisin de $\frac{1}{2}$.

§ 5. *Poisson* a donné une formule qui s'applique dans un domaine très différent lorsque p est très petit, même si le produit $m = np$ n'est pas grand¹ $y = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$.

$r!$ désigne le produit $r(r-1)(r-2).....3.2.1$.

y décroît très rapidement quand r croît au-dessus de m , c'est ce que *M. Bowley* appelle la *permanence* des petits nombres : les nombres r s'écartent peu de leur moyenne. C'est ce qui permet aux spécialistes de vivre. *M. Jordan* a donné des développements très intéressants théoriquement à partir de la formule de *Poisson*, ils ne paraissent pas avoir d'intérêt pratique.

§ 6. **Leur application aux répartitions statistiques.** — *M. Edgeworth* a utilisé les formules à plusieurs termes pour la description empirique des courbes de fréquence, mais écrit *M. Bowley* (*Eléments de statistique*, p. 455) « on n'a pas tranché la question de savoir jusqu'à quel point

1. D'une manière précise, *Poisson* a montré que, lorsque p est petit, les points de coordonnées r et $y = P(r)$ sont très près de la courbe dont nous avons donné l'équation.

Si nous reprenons l'exemple des villes de plus de 100.000 habitants la formule de *Poisson* donne pour les probabilités : 0,8278 ; 0,1564 ; 0,0148.

Elle est donc très voisine de la formule binômiale. *Bortkiewits* lui attribuait une grande importance et l'appelait *lois des petits nombres*.

cette formule est utile pour la description, l'interpolation ou l'atteinte d'autres buts ». M. Bowley applique la formule à deux termes dans huit cas dont deux ressortissent à l'économie politique : dépenses de nourriture dans différentes familles, villes classées d'après le prix de la farine. Nous aurons l'occasion de montrer que l'approximation obtenue par la loi de l'*effet proportionnel* est meilleure et que son emploi se justifie mieux.

La formule de Poisson ne paraît avoir d'utilisation que pour les très petits nombres (spécialistes). Nous la laisserons donc de côté. Il ne reste que la formule de Laplace dont l'importance est très grande. Nous allons montrer comment on l'utilise pratiquement. L'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses représente pour la répartition observée, le nombre total des observations, N ; pour la formule de Laplace, le calcul donne l'unité; par suite y représente la fréquence. Il faut aussi trouver l'échelle des abscisses, c'est-à-dire les coefficients de la relation entre z et x , $z = ax + b$, ce que l'on peut faire par le calcul ou graphiquement.

1° On peut songer à employer le principe des *moments*, en déterminant l'échelle de façon que la moyenne et l'écart quadratique soient égaux pour la répartition observée et la loi de Laplace¹.

2° Un procédé graphique utilise l'intégrale de Gauss : le nombre des observations dont l'abscisse est supérieure à x est une donnée expérimentale facile à obtenir à ce nom-

1. On démontre en effet les formules :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \, dz = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x y \, dz = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 y \, dz = \frac{1}{2}$$

en remplaçant z par $ax + b$, on a $z = \frac{x - A}{\sigma}$ les constantes sont déterminées.

bre correspond pour la courbe en cloche, l'aire de la courbe située à droite de la verticale de z , c'est-à-dire l'intégrale

$$R(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

cette fonction $R(z)$ est l'intégrale de Gauss.

Une table donne, à la fin de cet ouvrage, les valeurs de z en fonction de celles de 10.000 R. Chaque valeur observée pour R donnera ainsi une valeur de z correspondant à une valeur de x . En reportant sur un graphique, en abscisse x , en ordonnée z , on obtiendra des points qui seront d'autant mieux en ligne droite que la répartition suivra mieux la loi de Laplace. On ajustera une droite au mieux sur ce graphique, ce qui donnera z en fonction de x et réciproquement. La vérification et le calcul des éléments se fera en suivant la marche inverse. On calculera z , connaissant une certaine valeur de x , puis $R(z)$ s'obtiendra par la table.

§ 7. **Exemple, taux de paupérisme.** — Voici la répartition de 632 Unions suivant les taux p. 100 de paupérisme observés.

Tableau VII. — Taux de paupérisme (Angleterre), 1881

O	1	2	3	4	5	6
Taux %	Nombre d'unions	10.000 R	z	Z	10.000 R	Nombre d'unions
0 5	0	10.000	— 00	— 1,702	9.920	5,5
1 0	4	10.000	—	— 1,455	9.801	15,1
1 5	30	9.937	— 1,763	— 1,208	9.562	24,8
2 0	58	9.463	— 1,138	— 0,961	9.170	46,4
2 5	88	8.544	— 0,747	— 0,714	8.437	62,1
3 0	83	7.156	— 0,403	— 0,467	7.455	77,8
3 5	97	5.840	— 0,150	— 0,220	6.225	88,0
4 0	73	4.312	+ 0,123	+ 0,027	4.850	86
4 5	52	3.150	+ 0,341	+ 0,274	3.490	75,0
5 0	58	2.326	+ 0,516	+ 0,521	2.305	57,8
5 5	41	1.408	0,762	0,768	1.390	40,1
6 0	26	0.758	1,014	1,015	0.755	24,2
6 5	15	0.348	1,283	1,262	0.373	13,2
7 0	3	0.118	1,601	1,509	0.164	6,6
7 5	0	0.063	1,763	1,776	0.060	2,3
8 0	3	0.063	—	2,003	0.023,5	1,0

Méthode. — 1° Calculer les pourcentages correspondant à chaque tranche de la variable, les ajouter en commençant par la valeur la plus élevée de la variable, multiplier par 10.000 (*colonne 2*).

2° Chercher dans la table les valeurs de z correspondantes aux valeurs de R (*colonne 3*).

3° Tracer un graphique, la variable (ici le taux) en abscisse z en ordonnée (reporter les points correspondant aux valeurs calculées de z (*croix de la figure*), ajuster au mieux une droite, relever sur le graphique son équation (*figure 1*).

4° Calculer (ou lire sur la graphique) les ordonnées de la droite ajustée correspondant aux valeurs de x (Z de la *colonne 4*).

5° Chercher dans la table les valeurs de 10.000 R correspondant à Z (*colonne 5*).

6° Calculer les pourcentages de chaque tranche, en retranchant les valeurs successives de R , puis en multipliant par le nombre total N , calculer la répartition (*colonne 6*).

La comparaison des colonnes 1 à 6 ou la figure montrent l'approximation obtenue.

Pour cette répartition des taux de paupérisme¹, la droite ajustée a pour équation $Z = 0,49 (x - 3,45)$; x taux %. La correspondance est franchement mauvaise pour les taux très faibles, le test de Pearson² donne une probabilité de 0,01 pour que l'ensemble provienne d'un groupe représenté par cette formule. Mais de 2,5 % jusqu'aux taux les

1. Cette répartition est donnée par M. Pareto, dans son *Cours II*, p. 1327. Si on essaye de l'ajuster par les courbes de Pearson, on trouve, tous calculs faits, $B_1 = 0,2122$, $B_2 = 2,995$ et X négatif ce qui donne le type (I). L'union qui a le taux maximum 9,5 intervient à elle seule pour le quart du quatrième moment, on voit que B_2 est très peu stable.

2. Voyez l'*Annexe* à ce sujet.

plus élevés, l'approximation est très satisfaisante, sauf pour le taux de 4,5 %. Mais on doit remarquer que le chiffre observé 52, compris entre deux chiffres plus élevés était anormal. On pourrait, avec M. Bowley et M. Edgeworth, utiliser le terme complémentaire de la formule de Laplace à deux termes, mais cela paraît inutile puisque les chiffres observés présentent des anomalies assez importantes et que le terme correctif est très faible. Cela améliorerait cependant les valeurs correspondant aux faibles taux.

Le lecteur trouvera peut-être ces calculs difficiles, ils sont cependant indispensables pour notre sujet, les calculs de la *loi de l'effet proportionnel* sont identiques, l'effort ne devra être fait qu'une fois¹.

§ 8. **Autre exemple, salaires.** — Nous avons déjà considéré la répartition des villes de France suivant les salaires horaires courants des ouvriers terrassiers (Chapitre II). Ce sont des salaires nominaux et non des salaires réellement distribués. Ceux-ci peuvent être affectés par le chômage partiel dans l'industrie considérée².

1. L'application de ces méthodes, une fois que la théorie en a été faite une fois pour toutes, ne présente aucune difficulté spéciale, il n'est pas plus compliqué de se servir des tables de la fonction de Gauss que d'utiliser des tables de logarithmes; tout cela, ce sont des opérations simples de calcul, à peine plus compliquées que les quatre règles et à peine plus difficiles à savoir manier avec aisance, lorsqu'on s'en sert *fréquemment*. » (Allocution de M. Borel, président de la Société de statistique de Paris, *Journal de la Société*, 1922, p. 43.)

2. La méthode de Pearson donne :

$$B_1 = 0,235 \quad B_2 = 3,75 \quad X = + 0,2, \text{ type IV.}$$

Pour le même groupe, en octobre 1925 :

$$B_1 = 0,41 \quad B_2 = 4,05 \quad X = 0,34, \text{ type IV.}$$

Pour les salaires déclarés par l'*Amalgamed Society of Engineers*, en 1862 :

$$B_1 = 0,43 \quad B_2 = 3,05 \quad X \text{ négatif, type I.}$$

On trouve deux types pour des distributions analogues, cela ne tient pas à une différence de nature, mais vraisemblablement à l'influence accidentelle des moments d'ordre supérieur.

Tableau VIII. — Salaires horaires des ouvriers terrassiers.
France (Octobre 1926)

Salaires en Francs	Nombre de villes	10 000 R Obs	z Obs.	Z Calc.	10.000 R Calc.	Nombre de villes calculé
0	1	2	3	4	5	6
1 50 à 1 70	1	0.945	—1,801	—2,00	9.979	0,4
1 75 à 1 95	1	9.892	—1,625	—1,59	9.823	2,9
2 » à 2 20	7	9.516	—1,174	—1,18	9.525	5,5
2 25 à 2 45	14	8.763	—0,818	—0,77	8.620	16,9
2 50 à 2 70	38	6.720	—0,315	—0,36	6.950	31,1
2 75 à 2 95	34	4.890	+ 0,020	+ 0,05	4.720	41,5
3 » à 3 20	40	2.750	+ 0,423	+ 0,46	2.570	40,0
3 25 à 3 45	16	1,885	0,625	0,87	1.090	27,5
3 50 à 3 70	21	0,753	1,017	1,28	0.350	13,8
3 75 à 3 95	6	0,439	1,213	1,69	0.085	4,9
4 » à 4 20	5	0,162	1,513	2,10	0.015	1,3
4 25 à 4 45	2	0,054	1,801	2,51	0.002	0,3
4 50 à 4 70	0	—	—	—	—	0,05
4 75 et plus	1					

Droit ajustée : $Z = 1,64 (x - 2,95)$.

Les salaires extrêmes sont, d'une part, Montauban (1,50) et Tarbes (1,75), de l'autre Saint-Claude (4,25) et Oyonnax (4,75). On peut les expliquer par des considérations locales (peignes, pipes, main-d'œuvre étrangère).

La comparaison des colonnes 1 et 6 et la figure II montrent une approximation très satisfaisante obtenue avec seulement deux constantes.

§ 9. L'assimilation des répartitions économiques à un résultat de tirage de boules. — Il est naturel pour tenter d'expliquer l'ajustement par la formule de Laplace, de rechercher s'il est possible d'admettre que la répartition observée résulte d'un processus analogue au tirage des boules dans une urne.

Cela semble assez facile pour les *taux de paupérisme* que nous avons étudié. L'urne est l'Angleterre ou mieux toute

la population ouvrière; le taux étant le rapport du nombre des assistés au total, nous admettrons que dans cette urne il y a une certaine proportion p de boules blanches (ouvriers assistés). Il est très naturel d'admettre que la répartition des assistés dans les unions a lieu « au hasard » et que, par suite, tout se passe comme si chaque union tirait d'une urne un nombre de boules égal à son personnel, le nombre des boules blanches indiquant ses assistés. Rien d'étonnant donc à ce que la formule de Laplace soit bonne¹. Plus exactement, on devrait dire « formule binômiale », puisque seule celle-ci est rigoureuse. Or ici, il est naturel de prendre pour p , le taux moyen des 632 unions, soit 0,0345; ceci n'est pas voisin de $\frac{1}{2}$, la formule de Laplace est donc erronée *théoriquement*. Nous avons indiqué qu'un troisième terme améliorerait les extrêmes.

Cette explication ne semble guère pouvoir se généraliser. Cependant le champ de la formule de Laplace est plus étendu; Galton et Quetelet ont montré depuis longtemps déjà que beaucoup de répartitions statistiques étaient convenablement représentées par la formule de Laplace.

1. On peut pousser plus loin la comparaison : nous prenons comme valeur « présumée de p la moyenne observée $p^o = 0,0345$. Chaque taux observé est une valeur observée de p la dispersion étant $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

En prenant pour valeur « présumée » de cette dispersion l'écart quadratique des taux, nous commettons deux erreurs : p^o est différent de p , et le nombre des épreuves n'est pas infini. Sous ces réserves, on peut en tirer une valeur de n , soit 185

n est par définition le nombre moyen d'ouvriers par union. Ceci donne, pour les 632 unions, 117.000 ouvriers. C'est faible, même pour 1881, mais l'ordre de grandeur y est. En admettant que la série est « hypernormale » (coefficient de Lexis), on trouverait des chiffres plus forts. On peut encore chercher une preuve de la légimité de l'assimilation dans l'asymétrie de la courbe. B observé est 0,460, calculé à partir des valeurs de n et de p : 0,378.

Les formules de la statistique mathématique (M. Darmon) permettent de calculer les erreurs possibles sur p (2 %) et sur l'écart quadratique (au moyen du moment d'ordre 4) soit 10 %. n serait connu à un dixième près en supposant la série normale.

L'esprit ne peut concevoir que ce fait soit sans cause. Kapteyn en a donné, dans un exemple simple, l'explication.

§ 10. **Le raisonnement de Kapteyn.** — Nous allons le reproduire¹ en l'adaptant à notre second exemple : la répartition des villes françaises suivant le salaire d'une profession déterminée. Notons, à une certaine époque, les salaires dans les villes considérées ; si la tendance en France est, pour une cause quelconque, à l'augmentation des salaires de cette profession, un mois après les salaires auront grandi, mais pas tous dans la même mesure. Dans certaines villes, le syndicat ouvrier est plus violent dans d'autres, le patron, manquant de commandes, ne craint pas la grève, etc.

Supposons, pour commencer, des conditions très simples. Au début, toutes les villes ont le même salaire S , la tendance générale fait passer au bout d'un mois la moyenne à S' , la moitié des villes est à $S' + s$ l'autre moitié à $S' - s$. Le mois suivant, la tendance est encore à la hausse, mais nous supposons qu'elle *n'agit pas différemment sur les villes* à $S' + s$ et sur celles à $S' - s$. Dans la moitié des villes, le salaire va augmenter de $a + s$, dans l'autre moitié de $a - s$; mais les causes de différenciation ne sont plus les mêmes, telle ville défavorisée le premier mois, va être favorisée le second. Nous avons donc quatre groupes de villes, que nous pouvons supposer d'importance égale :

villes favorisées deux fois : salaire $S' + a + 2s$

villes favorisées, puis défavorisées . . . $S' + a$

villes défavorisées, puis favorisées . . . $S' + a$

villes défavorisées deux fois $S' + a - 2s$

1. Kapteyn a pris la répartition des grains d'un jardin suivant leur diamètre sous l'influence du soleil, de la pluie, etc. (*Skew Frequency Curves in Biology and Statistics*, 1903, d'après Jordan. *Statistique mathématique*, 1927.)

La probabilité pour qu'une ville déterminée appartienne à un des groupes est d'un quart.

Au bout de n mois, on aura, le mécanisme se poursuivant, 2^n groupes de probabilités égales; le nombre des groupes où r mois ont été favorables et $n-r$ défavorables sera $\binom{n}{r}$, nombre des arrangements différents que l'on peut former avec r mois favorables et $n-r$ autres. Or pour ces groupes, l'écart avec la moyenne générale est $rs - (n-r)s = (2r-n)s$ et la probabilité pour une ville d'avoir cet écart est le rapport du nombre des groupes qui le possèdent, au nombre total des groupes : soit $\binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Nous retrouvons la formule *binômiale* et, par suite, si n est grand, la loi de Laplace.

Remarquons, tout de suite, que nous avons fait l'hypothèse *essentielle* suivante. *La tendance à la hausse un mois quelconque favorise de la même façon tous les groupes, quelle qu'ait été leur variation les mois précédents*, en d'autres termes l'effet d'une cause est indépendante de l'effet des précédentes.

Il est facile de se débarrasser des hypothèses simplificatrices. On a démontré¹ que quel que soit l'effet des causes, si : 1° elles sont nombreuses, 2° *leur effet est indépendant de celui des autres*, 3° l'effet de chaque cause est

1. Cette démonstration a fait et fait encore l'objet de discussions passionnées sous la forme dite « de la loi des erreurs ». La première démonstration rigoureuse est due à Lindeberg (1922). M. P. Lévy a donné dans son *Calcul des probabilités*, une autre démonstration au moyen de la fonction caractéristique de *Cauchy-Poincaré*; récemment M. Frechet a contesté les hypothèses de base (en particulier, l'additivité des effets partiels). M. P. Lévy, a répondu dans un article de la même revue (le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, mai 1928 et janvier 1929), « Sur quelques travaux relatifs à la théorie des erreurs ». Page 12, il pose les trois hypothèses nécessaires et suffisantes pour affirmer que la distribution tend, pour n infini, vers la loi de Laplace. Tous ces travaux relèvent des hautes mathématiques. Citons Cantelli et Harold Cramer.

petit vis-à-vis de la somme des effets, la répartition sera celle de Laplace même si la probabilité de l'effet favorable est différente de celle de l'effet défavorable.

Donc, sous ces trois conditions, toutes ces hypothèses, de même salaire pour tout un groupe de villes, de différenciation égale, de variation relative égale à une même quantité s , chaque mois... disparaissent et l'assimilation indirecte à un tirage est réalisée par l'intermédiaire d'une formule commune, la formule *binomiale*. On comprend maintenant pourquoi la répartition des salaires suit la loi de Laplace.

§ 11. En effet, les causes de différenciation des salaires sont nombreuses, il est même impossible de les énumérer, toutes les conditions locales, si diverses et si variées, agissent. Etant très nombreuses l'effet de l'une d'elles sera petit. Les conditions 1 et 3 sont vérifiées.

La seconde condition mérite un examen approfondi : *l'effet de chaque cause est indépendant de celui des autres* ou encore, avons-nous écrit, la tendance à la hausse un mois quelconque favorise de la même façon tous les groupes, quelle qu'ait été leur variation les mois précédents. Qu'est-ce à dire ?

Prenons un exemple : en octobre 1929, le salaire horaire courant des terrassiers était de 3 fr. 75 à Saint-Etienne et de 5 fr. 75 à Lyon. Admettons que la tendance générale en France, par suite des conditions économiques du pays est, à ce moment, à la hausse. Admettre que la seconde condition est réalisée, signifie que cette tendance influence de la même quantité 0 fr. 20 par exemple, pour un mois, les salaires des deux villes.

Au bout du mois, on ne constatera pas, sans doute, cette augmentation parallèle, car d'autres causes auront agi.

Au contraire, on dira que cette condition n'est pas réalisée, si cette tendance a, par exemple, un effet proportionnel, 5 % du salaire.

§ 12. Il est donc impossible de démontrer rigoureusement que, pour une répartition économique donnée, toutes les conditions nécessaires pour la légitimité de la formule de Laplace sont remplies. Le processus intellectuel doit être le suivant : I des considérations *à priori* montrent qu'il est possible ou même probable que les conditions sont remplies ; II l'ajustement par la formule est satisfaisant ; III la valeur de l'approximation permet de considérer comme certain, très probable, ou peu probable *l'indépendance des effets des causes*.

L'opération intellectuelle (III) est essentiellement subjective et son résultat ne peut influencer celle qui la précède. En d'autres termes, on peut *rejeter* complètement l'indépendance des effets des causes et cependant *utiliser* avec fruit l'ajustement. Au contraire, un mauvais ajustement de l'observation rend inutile un jugement sur cette indépendance¹.

§ 13. **Résumé.** — De toutes les formules que l'on a proposé à la suite de la formule binômiale, seule celle de Laplace paraît avoir un intérêt général pour la représentation des répartitions économiques. L'explication peut être recherchée, soit dans l'assimilation directe de la répartition au résultat d'un tirage de boules dans une urne, soit dans une assimilation indirecte au moyen du raisonnement de Kapteyn. Ce dernier cas exige la réalisation d'une condition sur laquelle nous ne saurions trop attirer l'attention.

1. Nous tenons essentiellement à séparer ces deux choses : valeur de la formule comme procédé d'ajustement et légitimité de son interprétation.

CHAPITRE V

LA FORMULE DE L'EFFET PROPORTIONNEL

§ 1. **L'extension du raisonnement de Kapteyn.** — La formule de Laplace ne peut convenir qu'aux répartitions symétriques : or nous savons que la plupart des répartitions que l'observation fournit, surtout en économie politique, ne sont pas symétriques mais « asymétriques ». On le constate immédiatement en remarquant que moyenne, médiane, mode ne sont pas confondus. Le raisonnement de Kapteyn, convenablement modifié, peut servir de point de départ pour obtenir toute une classe de formules nouvelles conduisant à des répartitions asymétriques. La modification, convenablement interprétée, servira de *guide* pour déterminer *la nature* des répartitions susceptibles d'être ajustées par la formule obtenue. Enfin le succès de cet ajustement donnera, inversement, une *interprétation théorique* de la répartition.

Comment peut-on modifier, avec fruit, le raisonnement de Kapteyn ? Trois conditions, montre-t-il, sont nécessaires et suffisantes pour qu'une série d'observations suive la loi de Laplace. La première et la troisième sont remplies avec facilité, il n'en est pas ainsi de la seconde, comme nous

avons vu. Si pour le salaire des terrassiers, la tendance générale à la hausse influençait différemment celui des Stéphanois (3 fr. 75) et celui des Lyonnais (5 fr. 75), la seconde condition n'était pas réalisée, le raisonnement ne s'appliquait plus, la loi de Laplace ne convenait plus. Faisons une hypothèse *quelconque* sur la façon dont *l'effet d'une cause dépend de celui des autres*, les mathématiques permettront de trouver comment cette hypothèse modifie la formule. Nous ferons ainsi correspondre à chaque nouvelle hypothèse, une nouvelle formule.

A l'observation de nous dire, si, dans ce nouvel arsenal, nous ne trouverons pas une formule qui s'applique mieux que les précédentes ?

La loi de Laplace, pourrait s'appeler la loi de *l'effet constant*. Une même cause, agissant sur des salaires différents x_1, x_2, x_3 produit la même modification élémentaire dx .

Nous aurons une nouvelle formule en fixant la façon dont la modification dx dépend de l'effet des autres causes, c'est-à-dire de x .

§ 2. L'idée la plus simple¹ qui vient immédiatement à l'esprit est de prendre *l'effet proportionnel*. (Dans l'exemple des salaires, cette hypothèse signifie que chaque salaire est influencé proportionnellement, 5 % par ex.)

La variation dx étant proportionnelle à x , le quotient $\frac{dx}{x}$ sera indépendant de x et si on peut trouver une fonc-

1. L'hypothèse la plus générale s'exprimerait mathématiquement ainsi : $dx = f(x) \cdot dz$ ou en intégrant $z = g(x)$. Toutes les lois que l'on peut déterminer en généralisant le raisonnement de Kapteyn, suivant la manière indiquée au texte, s'énoncent : *il y a une fonction de la variable qui suit la loi de Laplace*. Nous proposons de donner à l'ensemble de ces lois le nom de lois de Kapteyn. (Voyez, *Annexe*, § 1, note).

tion z de x telle que $\frac{dx}{x}$ soit égal à dz , on voit que la nouvelle variable z satisfera la loi de l'effet constant, c'est-à-dire à la loi de Laplace. Or les échelles logarithmiques ont familiarisé l'économiste, même très étranger aux mathématiques, avec le fait que les variations du logarithme de x sont les variations relatives de x : $d(\log x) = \frac{dx}{x}$

La loi de l'effet proportionnel se traduira donc par le fait que les *logarithmes* de la variable seront répartis suivant la loi de Laplace. Nous aurons comme au chapitre précédent deux constantes arbitraires, dues à ce qu'on oblige par la formule $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$ la variable z à avoir une moyenne nulle et un écart quadratique donné. On aura donc la relation $z = a \log x + b$. Enfin, si on suppose que la variation dx est proportionnelle, non tout à fait à x , mais à la différence de x avec un nombre constant x_0 , ce qui revient à changer d'origine pour x , on obtient la forme la plus générale de la loi de l'effet proportionnel liant

$$\text{à } x : (A) \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \\ z = a \log (x - x_0) + b \end{array} \right.$$

Nous verrons que cette loi représente bien un grand nombre de répartitions économiques de natures très diverses et qu'il est inutile dans l'état actuel de la technique statistique de chercher une généralisation plus complexe de la seconde condition de Kapteyn. En particulier, elle introduit entre la médiane M , la moyenne A et le mode M_0 la relation $M_0 + 2A = 3M$ qui se trouve ainsi démontrée à partir d'hypothèses précises.

§ 3. **L'ajustement par la formule (A).** — Dans ce paragraphe, nous ne nous occuperons pas de la façon dont la

formule a été obtenue, aussi ne parlerons-nous pas de la loi de l'effet proportionnel, mais de la formule (A), ceci afin de bien montrer que cette formule a un intérêt par elle-même, indépendamment du raisonnement de Kapteyn et de sa modification. Notre attitude intellectuelle est la suivante pour le moment, voici une formule que nous nous sommes procurée par un moyen quelconque, peut-elle servir pour représenter des fonctions de fréquences¹ ?

§ 4. **Exemple 1, dépense en nourriture.** — M. Bowley, donne, d'après le *Class Cost of Living Committee*, 1918, la répartition de 970 familles anglaises d'après la dépense en nourriture par semaine, celle-ci étant rapportée à un adulte type (un enfant étant pris comme fraction d'adulte).

Tableau IX. — Dépenses hebdomadaires de nourriture
(Angleterre, 1918)

0	1	2	3	4	5	6	7
Dépense hebdomad. shillings	n	N	z	log xi	Z	N calc.	n calc.
inférieure à 5,5 s	18	970	—	—	—	970	16
de 5,5 à 7,5	107	952	— 1.475	0.740	— 1.518	954	118
» 7,5 à 9,5	255	845	— 0.801	0.875	— 0.769	836	243
» 9,5 à 11,5	245	590	— 0.194	0.978	— 0.198	593	248
» 11,5 à 13,5	173	345	+ 0.265	1.061	— 0.263	345	171
» 13,5 à 15,5	101	172	0.653	1.130	0.646	174	94
» 15,5 à 17,5	38	71	1.027	1.190	0.979	80	45
» 17,5 à 19,5	17	33	1.290	1.243	1.274	35	20
» 19,5 à 21,5	9	16	1.508	1.290	1.524	15	9
au-dessus de 21,5	7	7	1.730	1.332	1.768	6	6

1. C'était l'état d'esprit de Pareto, ayant l'idée de construire un graphique, logarithme des revenus en abscisses, celui du nombre d'individus de revenus supérieurs en ordonnées, puis constatant que les points reportés étaient à peu près en ligne droite. Qu'il attribue ensuite ce fait à l'organisation économique, à la nature de l'homme ou au hasard, ceci n'empêchera pas que les points soient en ligne droite.

n nombre de familles dont la dépense est comprise dans une tranche;

N nombre de familles dont la dépense est supérieure à la limite *inférieure* de la tranche;

Z valeur correspondant à x par la formule :

$$Z = 5,550 \log x - 5,625.$$

Méthode : 1° Calculer les N par addition successive des n à partir du bas (valeurs les plus grandes de la variable) (*colonne 2*).

2° Diviser par le total général (ici 970) et multiplier par 10.000 (on obtient ainsi 10.000 R). Puis lire dans la table la valeur correspondante de z (*colonne 3*).

3° Chercher les logarithmes de x (*colonne 4*)

4° Construire un graphique d'échelle convenable, les nombres de la colonne 4 en abscisses, ceux de la colonne 3 en ordonnées. Ajuster une droite, déterminer son équation (*figure III*).

5° Calculer (ou lire) les valeurs de Z liées à x par l'équation de la droite (*colonne 5*).

6° Lire dans la table, les valeurs de 10.000 R correspondant à Z , en déduire, en multipliant par le total des éléments (ici 970) les valeurs *calculées* de N (*colonne 6*).

7° Par différences en déduire les valeurs *calculées* de n (*colonne 7*).

La comparaison des colonnes 1 et 7, ou 2 et 6, et la figure III montrent l'approximation obtenue¹.

1. Pour obtenir le mieux possible l'équation de la droite, nous adoptons la méthode suivante. Un ajustement graphique donne une première approximation pour la droite. Nous calculons les différences d'ordonnées avec les points réels, et les reportons sur un graphique à petite échelle sur lequel nous interpolons une droite. Celle-ci nous fournit la seconde approximation voulue.

Elle apparaît ici excellente et pour mieux le voir, comparons avec les résultats que donnent les autres formules d'ajustement.

Tableau X. — Dépense de nourriture.
Comparaison de diverses formules

Dépense en shill.	Nombre de familles par tranche			
	réel	form. A	form. L	form. .
0 à 5,5	18	16	22	7
5,5 à 7,5	107	118	123	122
7,5 à 9,5	255	243	233	252
9,5 à 11,5	245	248	248	250
11,5 à 13,5	173	171	168	172
13,5 à 15,5	101	94	89	95
15,5 à 17,5	38	45	51	45
17,5 à 19,5	17	20	22	19
19,5 à 21,5	9	9	11	7
21,5 et plus	7	6	1	1

Form. B : Formule à deux termes Laplace-Edgeworth.

Form. C : Type III de Pearson.

Moyenne 10,75 sh.

Ecart quadratique 3,156.

BI = 0,708; B₂ = 4,035.

X = 8,1 type III.

Comme nous l'avons déjà dit, cette répartition est l'une des deux étudiées par M. Bowley dans ses *Eléments de statistique*, au moyen de la formule à deux termes de Laplace. C'est la seule traitée par la méthode des moments¹. On voit que la formule A est au moins aussi bonne pour les intervalles centraux et est bien meilleure pour les extrêmes. Le test de Pearson² donne, pour la formule A, une probabilité de 0,90 pour que les observations proviennent

1. On ne pourra donc nous accuser de choisir spécialement des exemples favorables.

2. Ce test, comme on le verra en *Annexe* (II), utilise les valeurs de $\frac{e}{m}$, m étant la valeur calculée et e , l'erreur absolue (col. 7 moins col. 1). La somme de ces quantités est une mesure de la valeur de la correspondance, plus elle est faible, plus celle-ci est exacte. La formule A donne 4,2, celle à trois termes 47,3; celle de Pearson 58,1. La probabilité donnée au texte se calcule à partir de cette somme.

d'un groupe représenté par la formule; la probabilité correspondante pour les formules B et C n'atteint pas un *millionième*.

§ 5. Exemple (II), répartition des établissements d'après le nombre d'employés et d'ouvriers. — Il s'agit de l'industrie (au sens de la S. G. F¹. sections 3, 4, 5, groupe 9B, chemins de fer exclus) pour les 87 départements de la France d'avant-guerre (recensement de 1921).

Tableau XI. — Etablissements d'après leur importance
(France-Industrie I, V, 5)

O Personnel	1 n	1 bis n pour 10.000	2 N p. 10.000	3 z	4 logx	5 Z	6 N calc p. 10.000	7 n calc p. 10.000
1	233.725	4.589	10.000	—				6.360
2	97.404	1.912	5.411	—0,073				
3	45.795	899	3.499	+0,272		0,246	3.640	1.020
4	26.255	515	2.599	0,451	0,301	0,451	2.620	527
5	16.768	329	2.085	0,575	0,477	0,572	2.093	333
6	11.772	231	1.756	0,658	0,602	0,658	1.760	230
7	7.906	155	1.525	0,726	0,699	0,724	1.530	170
8	7.129	140	1.370	0,773	0,778	0,777	1.360	135
9	4.713	92,5	1.230	0,820	0,845	0,822	1.225	110
10	5.742	113	1.137,5	0,854	0,903	0,862	1.115	92
11 à 20	22.929	451	1.024,5	0,896	0,954	0,897	1.023	423
21 à 50	16.973	333	573,5	1,117	1,279	1,099	600	360
51 à 100	6.336	124	240,5	1,398	1,690	1,400	240	126
101 à 200	3.345	66,3	116,5	1,605	1,996	1,610	114	62
201 à 500	1.820	35,8	40,2	1,821	2,299	1,815	52	36
501 à 1.000	454	8,9	14,4	2,106	2,698	2,087	16	8,5
1.001 à 2.000	190	3,7	5,5	2,317	3,000	2,244	7,5	5,3
2.001 à 5.000	72	1,35	1,8	2,52	3,301	2,50	2,2	0,45
5.001 et plus	24	0,45	0,45	2,77	3,699	2,77	0,45	1,75

Total : 509.352 droite ajustée : $Z = 0,6825 \text{ LOG}(x - 1) + 0,2465$ (figure IV)
moyenne d'ouvriers par établ. : 8,60

1. Nous étudierons plus tard cette nomenclature, ainsi que les problèmes qu'une telle répartition soulève.

La concordance est vraiment extraordinaire, d'un bout à l'autre de l'échelle, la formule donne d'excellents résultats. *Comparez les colonnes 1 bis et 7 ou 2 et 6.*

Les établissements géants et les ateliers de quelques ouvriers se retrouvent sans erreur notable¹. Si on calcule au moyen des formules de l'annexe le nombre moyen d'ouvriers et d'employés pour la répartition théorique correspondant à la droite ajustée, on trouve 8,50 au lieu de 8,60. Si on détaille encore, on trouve pour la proportion des ouvriers dans les établissements de 1 à 5 ouvriers, 17,6 % au lieu de 17,3 observé et dans ceux de plus de 10 ouvriers 76,8 au lieu de 76,2. Il est donc certain que la formule A peut prétendre représenter très convenablement la répartition observée.

§ 6. La troisième constante x_0 , sa détermination. — x_0 joue dans la formule A le même rôle que a dans celle de Pareto. On le détermine par approximations successives de façon que la formule serre le mieux possible la distribution. Sa valeur naturelle correspond au minimum de la variable x ; mais comme c'est un véritable paramètre au même titre que a et v , il est bon de l'utiliser pour améliorer la concordance². En particulier l'ajustement des répartitions de *revenus* nécessite toujours la détermination de x_0 . Nous allons donner sur un exemple quelques indications sur la manière dont on peut procéder, c'est une pure question de mathématiques.

1. Sur la figure, la concordance s'exprime par le fait que 17 points sont en ligne droite d'une façon presque parfaite à l'échelle choisie.

2. La présence du logarithme dans la formule montre que x est obligatoirement supérieur à x_0 , l'argument doit toujours être positif. Il en était de même pour le paramètre a de la troisième formule de Pareto, $x + a$ étant nécessairement positif.

§ 7. Exemple III, répartition des contribuables anglais à la cédule D de l'Income-tax. — Il s'agit de la cédule, commerce et professions pour l'année 1893-94. La valeur minimum¹ du revenu x est 150 £. La graphique z , $\log(x - 150)$ comprend une ligne droite pour les grands revenus (au-dessus de 600 £ s'infléchissant pour les petits vers l'axe des x). Cela tient à ce que la valeur de x_0 ainsi choisie n'est pas adéquate à la répartition. Deux méthodes au moins paraissent possibles :

1° Essayer successivement les divisions : 200, 300, en ne tenant plus compte des revenus inférieurs, on doit alors recalculer les valeurs de z .

2° Utiliser tous les revenus, en gardant les mêmes valeurs de z , mais en leur faisant correspondre les valeurs de $\log(x - x_0)$, x_0 étant différent de 150.

Dans la première, on constate que les courbes s'infléchissent de moins en moins s'incurvent en sens inverse. Il y a donc une valeur de x_0 , $x_0 = 475$ £, pour laquelle la courbe est presque une droite, c'est évidemment cette valeur que l'on choisira. L'approximation est très bonne comme le montre la colonne 2 du tableau suivant qui donne pour un certain nombre de valeurs de x , le nombre des revenus supérieurs à x (*erreur moyenne* 0,7 % dix fois moins que l'équation de Pareto). Mais il y a un gros inconvénient, les revenus inférieurs à 475 £ ne sont plus représentés.

Dans la seconde méthode, on constate en faisant croître x_0 que la courbe s'infléchit encore de moins en moins, et qu'elle devient une ligne droite pour une valeur de x_0

1. Dans la première méthode, on essaye de sauvegarder l'interprétation par le raisonnement de Kapteyn modifié; dans la seconde, on ne s'occupe que d'ajuster le mieux possible.

beaucoup plus voisine du revenu minimum que précédemment : 220 £. Nous adopterons toujours cette méthode.

Méthode pour déterminer x_0 . — 1° Calculer les valeurs de z comme précédemment.

2° Prendre pour valeur de x_0 , la valeur minimum du revenu, construire le graphique habituel, $\log(x - x_0)$ en abscisses, z en ordonnées.

3° Si la courbe s'infléchit vers l'axe des logarithmes, augmenter la valeur de x_0 et construire de nouveau le graphique, les abscisses seules ayant changé.

4° Procéder ainsi jusqu'au moment où l'infléchissement change de sens. On a alors la meilleure valeur de x_0 pour l'ajustement.

Le tableau permet de comparer les résultats obtenus :

Tableau XII — Revenus anglais (Cédule D) 1893-94

0 x £	1 N observé	2 calculé (1 ^{re} méth.)	3 N calculé (2 ^e méth.)	4 N calculé (Pareto)	5 z	6 Erreurs Pareto	7 % Fo (A)
150	400.648	»	400.648	415.800	»	»	»
200	234.185	»	»	250.300	— 0,151	»	»
300	121.996	»	117.515	122.700	+ 0,362	+ 0,6	— 3,6
400	74.041	»	73.115	73.720	0,634	— 0,4	1,2
500	54.419	55.213	53.665	52.840	0,778	— 3,0	1,3
600	42.072	42.105	41.970	41.850	0,886	— 0,5	0,2
700	34.269	34.190	33.550	33.380	0,968	— 2,5	2,1
800	29.311	29.090	29.250	28.130	1,028	— 4,2	0,2
900	25.033	25.015	25.350	24.900	1,086	— 5,4	+ 1,2
1.000	22.896	22.405	22.425	21.265	1,117	— 5,0	2,0
2.000	9.880	9.985	9.725	9.208	1,390	+ 7,3	1,5
3.000	6.069	6.047	5.955	6.512	1,532	+ 10,2	1,8
4.000	4.161	4.108	4.150	4.586	1,634	+ 12,6	0,2
5.000	3.081	3.074	3.120	3.270	1,712	+ 6,1	+ 1,3
10.000	1.104	1.104	1.140	970	1,964	— 13,8	+ 3,0

N nombre de contribuables ayant un revenu supérieur à x £.

Les colonnes 6 et 7 donnent les erreurs relatives des formules de Pareto et de la formule A (2^e méthode.)

Nous pouvons faire la comparaison de la formule A avec celle de Pareto (colonne 4), les erreurs sont colonnes 6 et 7. L'erreur de Pareto est en moyenne de 5,5 %, celle de la formule (A) 1,8 %, soit trois fois moins ! De plus, la formule (A) conserve le même degré d'approximation d'un bout à l'autre de l'échelle des revenus, celle de Pareto est moins satisfaisante pour les gros¹.

§ 8. Exemple IV : répartition des revenus frappés de super-tax — Nous pourrions évidemment multiplier les exemples d'application de notre formule presque à l'infini. Dans la quatrième partie de cet ouvrage, nous étudierons méthodiquement le champ d'application de la formule. Voici cependant le seul exemple de la loi de Pareto

Tableau XIII. — Revenus anglais frappés de super-tax

Catégorie de revenus en milliers de £	Nombre de revenus		
	réel	calculé	
		Pareto	Form. A.
5 à 10	7.411	7.546	7.423
10 à 15	2.029	1.890	2.017
15 à 20	787	790	801
20 à 25	438	424	430
25 à 35	382	411	377
35 à 45	186	199	185
45 à 55	107	103	104
55 à 65	56	70	59
65 à 75	37	50	40
75 à 100	55	118	52
100 et plus	66	83	66

Total des revenus :	Statistique officielle :	145 Millions £
—	Calculé, formule Pareto	166 —
—	form. A	147,6

1. Voici les formules utilisées :

(A) 1^{re} méthode : $z = 1,000 \log (x - 475) - 2,510$.

(A) 2^e méthode : $z = 0,756 \log (x - 220) - 1,062$.

Pareto $N = \frac{A}{x^\alpha} \log A = 8,30\ 828; \alpha = 1,50$.

donné dans les *Eléments de statistique* de M. Bowley et la comparaison avec la formule A¹. Il s'agit des revenus anglais de 1911-12 frappés de super-tax (supérieurs à 5.000 £). Voyez aussi la figure V.

Cet exemple est très instructif, car il montre les défauts de la formule de Pareto; les chiffres extrêmes sont tout à fait faux. La formule A, au contraire, épouse, avec aisance, la répartition observée, d'un bout à l'autre.

L'erreur pourcentuelle en moyenne est de 21 % pour la formule de Pareto et de 2,5 % pour A.

§ 9. **Résumé.** — Une modification convenable de la seconde condition de la loi de Laplace, nous a conduit à une nouvelle série de formules susceptibles de représenter des répartitions statistiques. Une de ces formules, la *formule A*, issue d'une hypothèse *d'effet proportionnel*, mais considérée *indépendamment de son origine* permet, d'après les exemples que nous donnons, d'ajuster des répartitions très diverses d'une manière convenable et semble-t-il mieux que les formules proposées jusqu'ici. Elle introduit deux ou parfois trois paramètres que nous avons appris à déterminer. La méthode graphique est, comme pour la loi de Laplace, uniquement utilisée, par suite de la facilité de la discussion et de sa rapidité.

1. On ne pourra donc penser que l'exemple précédent est un hasard heureux, voici les formules utilisées : $z = 1,143 \log (x - 5,7) - 0,467$.

Et pour Pareto : $\log A = 9,618$ et $\alpha = 1,50$.

Le test de Pearson donne pour la formule A une probabilité de 0.793 pour Pareto un peu moins d'un milliardième !

CHAPITRE VI

LA LOI DE L'EFFET PROPORTIONNEL

§ 1. **Les conséquences de l'ajustement convenable par la formule A.** — Le chapitre précédent nous a montré que la formule A, déduite d'une modification convenable du raisonnement de Kapteyn représentait d'une façon très convenable des répartitions diverses, entreprises classées d'après l'importance de leur personnel, contribuables classés d'après la grandeur du revenu imposable, etc. On peut donc affirmer, que *tout se passe comme si* les hypothèses, nécessaires pour obtenir la formule, étaient vérifiées. On possède, ainsi, une *explication* de la forme de ces répartitions, il reste à voir si elle est *plausible*. En effet, les vérifications statistiques ne pourront jamais permettre d'affirmer l'identité complète d'une formule et d'une fonction de fréquences observées et cette identité seule permettrait de *démontrer* rigoureusement les *causes* d'une répartition. Il est donc absolument nécessaire de contrôler cette *explication* par tous les moyens possibles et de voir si elle est conforme au bon sens et aux résultats acquis de l'économie politique¹. Elle sera toujours provisoire et soumise à révision.

1. « Ici comme ailleurs, il ne faut pas trop demander à la statistique et à ses techniques nouvelles. Elle fournit des faits et des mesures précieuses par leur précision et leur objectivité. Mais l'interprétation reste toujours du domaine de la science particulière qui fait usage des procédés statistiques. » *Observations de M. Aftalion au sujet d'une communication de M. March sur la technique statistique. (Journal de la Société de Statistique, 1928.)*

Par contre, il est possible de dérouler à partir de la formule une suite de syllogismes mathématiques, ou non; ils seront applicables à la répartition observée dans la mesure facile à déterminer où la formule est conforme à l'expérience. On pourra ainsi obtenir des résultats certains et définitifs.

Nous nous bornerons, dans ce chapitre, à l'étude de l'interprétation, rejetant les autres conséquences dans la 2^e partie de cet ouvrage (nous les passerons en revue à propos de chaque nature de répartition).

§ 2. Répartition des entreprises d'un pays suivant l'importance du personnel. — Nous suivrons la marche de Kapteyn pour l'explication de la formule de Laplace; en admettant, pour commencer, des conditions très simples. La réalité est très éloignée, qu'importe ! nous n'exposons pour le moment qu'un schéma explicatif.

Aujourd'hui toutes les entreprises ont le même nombre d'ouvriers, p . En sera-t-il ainsi dans un mois, par exemple ? Evidemment non ! Le nombre total des entreprises aura varié, ou bien le personnel total ou les deux. La cause importe peu, relèvement des droits de douane favorisant le groupe industriel considéré, essor ou dépression économique, « fluctuations industrielles » de quelque nature que ce soit. Admettons qu'aucune entreprise ne se crée, aucune ne disparaît, seule varie le nombre moyen d'ouvriers. Il augmente, par exemple et au bout d'un mois devient p' , cette variation ne peut favoriser de la même façon toutes les entreprises. Les circonstances particulières à chacune, dispersent les chiffres qui mesurent le nombre d'ouvriers dans chaque entreprise, autour de p' . Admettons que pour la moitié d'entre elles (entreprises A) ce chiffre devient

$p' - a$, et pour l'autre moitié (entreprises B) $p' + a$, par conséquent. Que se passe-t-il le mois suivant ? Une nouvelle cause de « fluctuations industrielles » fait varier le personnel moyen, il devient p'' .

Admettons que cette cause agit de la même façon sur l'ensemble A et sur l'ensemble B, c'est-à-dire qu'elle est *indépendante de l'importance du personnel* puisque celle-ci diffère pour A et B. Nous devons trouver une répartition satisfaisante à la loi de Laplace. En effet, la moyenne pour A devient le second mois $p'' - a$ (variation $p'' - p'$) mais les circonstances locales se sont modifiées, soit parce que la cause générale de variation n'est plus la même, soit pour des raisons intérieures à l'entreprise. En poussant les choses à l'extrême, on peut admettre que pour une moitié de A, le personnel est au nombre de : $p'' - a - a$ et pour l'autre $p'' - a + a$. Pour le groupe B, la moyenne est $p'' + a$ (variation $p'' - p'$), mais il s'est aussi décomposé deux parties égales de personnel $p'' + a - a$ et $p'' + a + a$. En tout, quatre groupes comprennent le même nombre d'entreprises, un où chaque entreprise possède $p'' - 2a$ ouvriers, deux où ce nombre est p'' , et un où il est $p'' + 2a$. C'est le raisonnement de Kapteyn sans aucune modification et il conduit à la loi de Laplace par l'intermédiaire de la formule binômiale.

On voit immédiatement que l'on arrivera à la formule A, que vérifie l'expérience si on admet que la cause de *fluctuation n'agit pas de même sur les entreprises A et B*, en d'autres termes, *si elle dépend de l'importance du personnel*. Plus exactement, il faut admettre que *l'effet est proportionnel*, c'est-à-dire que le personnel moyen sera modifié dans la même proportion pour les deux groupes A et B. La *variation relative* sera la même. Comme cette variation relative

est la variation absolue du *logarithme*, on voit en reprenant le raisonnement de Kapteyn sans changement que la répartition des entreprises suivant la grandeur du logarithme du nombre des ouvriers sera représentée par la formule de Laplace.

§ 3. Nous avons vu comment l'application des mathématiques permettait de se débarrasser des hypothèses simplificatrices : égalité au début du nombre d'ouvriers pour toutes les entreprises, causes particulières agissant de la même façon sur tout un groupe d'entreprises, etc. Il ne reste que trois conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir la formule A, expression de ce que nous appelons la loi de l'effet proportionnel¹ :

1° Les causes de « fluctuation » du personnel sont nombreuses.

2° Leur effet *relatif* sur le nombre d'ouvriers (ou leur effet absolu sur le *logarithme*), ne dépend pas de ce nombre d'ouvriers.

3° L'effet de chaque cause de « fluctuation » est petit vis-à-vis de l'effet de toutes, c'est-à-dire du nombre d'ouvriers.

Est-il possible d'admettre que ces conditions sont réalisées ? Il ne paraît pas y avoir de difficulté pour la première et la troisième. Pareto parle de « cet ensemble de causes inconnues agissant tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre », nous n'avons pas besoin de les connaître individuellement, pour croire qu'elles sont nombreuses et que chacune d'elles ne modifie que peu le nombre d'ouvriers.

1. Nous l'appelons ainsi à cause de la seconde condition qui la caractérise.

§ 4. La simplicité de la seconde condition, *effet proportionnel au nombre* d'ouvriers, est un peu inattendue, on admet aisément que l'effet ne soit pas constant, mais comment expliquer que des entreprises de 4 ou 5 ouvriers à celles de plus de 5.000, on ait la proportionnalité ? N'est-il pas étonnant qu'une tendance générale à l'augmentation du personnel moyen amène les entreprises de 10 ouvriers à 11 en moyenne et celles de 1000 à 1.100 ?¹

Etant donné la précision de l'ajustement obtenu, tout se passe comme s'il en était ainsi. Cette précision n'étant pas absolue — et elle ne peut pas l'être — il n'est pas possible de démontrer, on ne peut qu'essayer de persuader.

§ 5. Répartition des individus suivant l'importance du **revenu** (courbe des revenus). — L'explication est valable presque sans changement. La nécessité d'introduire la constante x_0 pour représenter convenablement les répartitions modifie ainsi les conditions nécessaires précédentes. Soit x le revenu :

- 1° Les causes de variation du revenu x sont nombreuses ;
- 2° L'effet *relatif* de chacune sur $x - x_0$ (le revenu rapporté à une origine convenable) ne dépend pas de x , il en est donc ainsi de l'effet sur $\log (x - x_0)$.
- 3° L'effet de chaque cause de variation est petit vis-à-vis de l'effet de toutes, c'est-à-dire de x .

Ici encore les conditions 1 et 3 paraissent naturelles. Mais 2 peut mieux se justifier. Le revenu est « le flot des capitaux » pénétrant dans le patrimoine pendant une période de temps déterminée, un an, par exemple, salaire,

1. Tout ceci suppose, bien entendu, que l'on étudie l'action de la tendance dans un temps très court, les variations devant être infiniment petites, en particulier il n'y a pas de variation de la « concentration » au sens que nous donnerons à ce mot dans le chapitre suivant.

intérêt, profit, rente de la terre. Une variation du taux général des profits, en entendant sous ce nom pour éviter les difficultés, le profit composite des dividendes, atteint les revenus individuels proportionnellement à ceux-ci en moyenne. Le terme x_0 s'introduit même naturellement, puisqu'on ne place pas en actions ou en participations le fonds de roulement. La proportion porte donc sur $x - x_0$ ¹. Il en sera de même pour la rente et l'intérêt, mais simplement dans la proportion des renouvellements de bail ou de prêt, ou de nouveaux placements. L'effet proportionnel non seulement paraît naturel, mais s'impose en première approximation. On peut seulement se montrer surpris que cette première approximation donne de tels résultats. On peut objecter, en effet, que les gros capitalistes se protègent mieux que les petits contre les variations du taux général, etc. Les statistiques ne permettent pas, à l'heure actuelle, de le constater².

L'effet proportionnel est plus inattendu pour les salaires. Les documents statistiques permettent de faire l'étude séparée de ce revenu spécial. Nous la ferons plus tard, les résultats sont favorables à la loi, contentons-nous de dire que tout se passe ainsi et que si cette simplicité est un peu

1. On peut se demander pourquoi ce fonds de roulement x_0 est constant, indépendant du revenu par conséquent. Il faut plutôt le considérer comme une moyenne quelconque. Ce nombre est d'interprétation assez difficile et il faut parfois se contenter de l'utiliser sans l'expliquer. Une assez forte variation de sa grandeur est sans influence importante sur la valeur de l'ajustement, son rôle est faible.

2. On ne pourrait aller plus loin et soutenir que le mode d'établissement actuel de ces statistiques (déclaration fiscale) modifie la réalité dans le sens favorable à la loi de l'effet proportionnel. Le coefficient a de la formule $z = a \log (x - x_0) + b$, varie en sens inverse de la « mobilité ». Il devrait être plus élevé pour les gros revenus, et par suite le diagramme $(z, \log (x - x_0))$ s'infléchir vers l'axe vertical. Mais les gros revenus se dissimulent mieux, leurs bénéficiaires connaissent les procédés compliqués d'évasion fiscale, donc, à x donné, N est trop faible et Z trop élevé. Les effets s'ajoutent.

surprenante; il est difficile de la rejeter, rien ne s'y oppose formellement.

§ 6. Répartitions susceptibles d'être représentées par la formule A. — Il en sera ainsi, d'abord¹ de toutes celles pour lesquelles la loi de l'effet proportionnel *a des chances de s'appliquer*. L'extension des deux groupes précédents se fait sans difficulté. Le succès pour la répartition des entreprises suivant le personnel rend probable celui des propriétaires de bateaux suivant le nombre possédé (statistiques de la batellerie) des entreprises suivant une caractéristique de leur puissance, énergie consommée, capital, etc.. L'application satisfaisante de la formule aux revenus rend *probable* une utilisation convenable pour les répartitions des successions des fortunes, et celles de toutes les grandeurs qui composent le revenu global : revenu des propriétés bâties, des propriétés foncières, loyers, des locaux d'habitation, rente des caissés nationales, etc. Lorsque la vérification s'est faite un grand nombre de fois, on devient presque sûr de voir la formule se vérifier encore. On arrive ainsi à croire que cette possibilité de représenter toutes ces répartitions de revenus correspond à une propriété commune à tous, l'effet proportionnel.

A une variation du taux moyen du revenu considéré, correspond pour les revenus individuels une variation proportionnelle.

Ceci n'est vrai évidemment qu'en moyenne, c'est-à-dire que si la variation du taux général moyen est de 5 %, les revenus compris entre 30.000 et 40.000 éprouveront *en*

1. Il peut se faire que la formule (A) s'applique sans qu'on puisse le prévoir.

moyenne une variation de 5 %, soit 1.750 fr., et il en sera ainsi pour toutes les tranches.

§ 7. On ne peut limiter le domaine d'application *a priori*. Comme nous l'avons de nombreuses fois répété, il faut voir d'abord si la loi a des chances de s'appliquer et ensuite de faire les calculs. C'est ainsi que nous étudierons rapidement la répartition des villes suivant leur grandeur, celle des familles suivant le nombre des enfants. Le seul lien de tout cela est la proportionnalité de l'effet élémentaire, lien qui conduit à une formule unique.

§ 8. **Résumé.** — Trois hypothèses simples dont deux très naturelles, conduisent à une formule unique pour les répartitions qui y satisfont. Or cette formule s'applique mieux que celles qui ont été proposées auparavant, à toutes sortes de répartitions de nature très diverses.

Il est donc permis de croire que cette similitude de formules tient à une propriété commune, c'est ce que nous appelons la loi de l'effet proportionnel¹.

1. Laplace a montré le premier que l'on pouvait considérer les erreurs d'observation comme dues à de nombreuses causes élémentaires, chacune ayant séparément un effet insensible. On obtient alors sa loi. Kapteyn a montré que *si les erreurs sont grandes* vis-à-vis de la grandeur mesurée, la répartition est asymétrique. Cela tient à ce qu'il devient difficile d'admettre *l'effet constant*. Nous pouvons appliquer ceci à notre sujet. Lorsque la variable, (le caractère de classement) aura un champ de variation peu étendu on trouvera la loi de Laplace, au contraire, quand elle variera beaucoup, ce sera la loi de l'effet proportionnel. Ceci nous permet de comprendre pour quoi la répartition des villes d'après les salaires des terrassiers était une répartition de Laplace, en effet la variation de ce salaire était assez faible. Il ne pouvait en être de même pour les statistiques d'impôt sur le revenu, la variation des revenus étant énorme. Les salaires oscillaient de 1 fr. 75 à 4,75, les revenus de 150 à 10.000 £ le personnel des entreprises de 1 à 5.000.

La formule de Laplace serait une approximation de celle de l'effet proportionnel.

CHAPITRE VII

L'INEGALITE D'UNE REPARTITION

§ 1. La définition de l'inégalité est nécessaire, mais difficile. — Les grandeurs que nous avons rencontrées jusqu'ici, médiane, moyenne, etc. ne suffisent pas pour donner une idée même approximative des principales propriétés de la répartition que l'on veut étudier. Elles ne tiennent pas compte des différences entre les éléments, de leur inégalité en un mot¹. Une mesure de celle-ci nécessite une définition. Or comment faire pour comparer facilement des ensembles d'éléments groupés d'après un caractère si on ne peut chiffrer l'inégalité, la variabilité dit-on parfois de ces éléments dans les ensembles à comparer. Ainsi comment peut-on affirmer que l'inégalité des revenus va constamment en diminuant sans la définir ? C'est pourtant ce que des économistes très savants ont fait ; ainsi Leroy Beaulieu dans son *Essai sur la répartition des richesses*². Quelle valeur attribuer aux études sur la concentration³

1. L'écart quadratique cependant donnait une mesure de l'inégalité nous le retrouverons.

2. Il s'est cependant rendu compte de l'importance des différences et dès les premières pages, cite des phrases de Lassalle très caractéristiques : « Ce n'est pas la situation absolue qui importe, c'est la situation relative. Que les ouvriers soient bien nourris, bien logés, bien vêtus, qu'ils aient des loisirs, qu'ils jouissent de la sécurité du lendemain et du repos de la vieillesse, tout cela n'a pas d'importance... si d'autres hommes ont une table plus raffinée, des palais plus amples, des meubles plus agréables. »

3. Exception faite d'un travail de M. March que nous verrons.

des entreprises qui ne donnent jamais une définition de celle-ci !

§ 2 La définition de l'inégalité n'est d'ailleurs pas facile et c'est sans doute la raison pour laquelle on s'en passe. Des économistes très avertis et de culture mathématique poussée n'ont pas toujours évité les doubles sens. Pareto qui, cependant, fut un précurseur génial, a donné de l'inégalité des revenus, une définition très critiquable.

La voici : « Lorsque le nombre des personnes ayant un revenu inférieur à x , augmente par rapport au nombre des personnes ayant un revenu supérieur à x , nous dirons que l'inégalité des revenus diminue ».

Quelques lignes plus haut (p. 320 du *Cours*, t. 2), il écrit : « La diminution de cette inégalité sera donc définie par le fait que le nombre des pauvres va en diminuant par rapport au nombre des riches ».

Il est difficile de ne pas trouver ces deux définitions contradictoires, car les « pauvres » sont certainement les personnes de « revenu inférieur à x » et les « riches » de revenu supérieur. Quand nous avons lu cela, nous nous sommes précipité aux *Errata*, il n'y a rien. Allons plus loin, et prenons une de ces définitions, celle que Pareto prend en note de cette page 320 et dont l'ailure mathématique rassure : soit $N(x)$ le nombre des individus dont le revenu est supérieur à x et $N(h)$ le nombre des individus dont le revenu est supérieur au minimum du revenu h , c'est-à-dire le nombre total des individus imposés. Soit $u(x)$ le rapport $\frac{N(x)}{N(h)}$. Pareto énonce « suivant la définition que nous avons donné, l'inégalité ira en diminuant quand $u(x)$ croîtra ». C'est donc la seconde définition. Le nombre des pauvres décroît donc par rapport au nombre des riches, la pauvreté diminue,

l'inégalité décroît, cela paraît conforme au bon sens. Mais comme on l'a fait remarquer¹, on peut retourner la proposition et dire, le nombre des riches croît par rapport au nombre des pauvres, la classe riche devient prédominante, elle écrase de plus en plus la classe pauvre, l'inégalité croît.

Si on pense à tous les résultats que les différents auteurs tirent de pareilles définitions, on ne peut manquer d'être un peu effrayé.

§ 3. Nous allons passer en revue les différentes définitions qui ont été fournies pour l'inégalité. On peut les ranger en deux catégories suivant qu'elles dépendent ou non d'un ajustement mathématique.

§ 4. **Les caractéristiques de l'inégalité indépendantes d'un ajustement préalable.** — L'intervalle entre les deux quartils, l'*interquartil* comprend par définition, une moitié des éléments de la répartition puisque les deux quartils sont aux quart et trois-quart. Plus il est grand, plus les éléments sont en général inégaux, inversement plus il est petit, plus les éléments sont rapprochés de la médiane. Pour les comparaisons, il est bon, évidemment, de le rapporter à la médiane, de façon qu'il ne dépende pas de l'échelle adoptée². On a ainsi l'*interquartil relatif*.

De même on tirera des indications de l'*interquartil relatif*, intervalle qui comprend la moitié du total des salaires distribués, s'il s'agit d'une répartition de salaires, du total

1. M. le baron Murre (*Journal de la Société de statistique de Paris*, 1922, p. 215) indique que MM. Benini et Bresciani ont utilisé la définition de Pareto en sens inverse de celui-ci. Pareto lui-même l'a fait remarquer, et déclare que sa définition de l'inégalité correspond au sens qui paraît avoir prévalu dans l'opinion courante, il s'appuie sur Leroy-Beaulieu : « Les progrès du bien-être sont et seront plus rapides que ceux de la classe moyenne et de la classe élevée. »

2. Par exemple si on compare des salaires en £ et des salaires en fr.

du personnel employé si on a une répartition d'entreprises d'après le personnel. On peut encore utiliser l'écart entre la médiane et la médiale, ou mieux l'écart relatif rapporté à la médiale, la *déviante intermédiaire*¹, ou bien l'écart entre le mode et la moyenne. De toutes ces grandeurs la seule qui soit utilisée est l'interquartil relatif², on lui substitue parfois le *rapport des quartils* qui est indépendant de l'échelle adoptée.

Kiaer, autrefois directeur du bureau central de statistique de Norvège et véritable spécialiste de la répartition des revenus, utilisait une division *en cinquièmes*, identique à celle en quartals au nombre de divisions près³.

§ 5. Toutes ces définitions utilisent deux points et *deux seulement* de la répartition observée. Celle-ci peut prendre une allure quelconque entre ces deux points sans que cela change le moins du monde l'inégalité mesurée. Cette observation renferme tous les avantages (simplicité, calcul commode...) et tous les défauts (grandeur peu significative et sans valeur si les types des répartitions à comparer sont différents).

§ 6. M. Corrado Gini part d'une conception plus logique : dans le cas d'une répartition de salaires par exemple, chaque ouvrier compare son gain à celui de ses compagnons pris individuellement, on résumera donc les observations

1. Voyez l'étude de M. March, Différences et corrélation en statistique (*Journal de la Société de statistique de Paris*, 1928, p. 38) et les références dans Metron (tome 1.)

2. Etude de M. Dugé de Bernonville (*Bulletin de la S. G. F.*, t. 2, p. 400); Bénéfices et chiffres d'affaires. (*Bulletin S. G. F.*, t. 18, p. 293.)

3. Kiaer, *Bulletin de l'Institut international de statistique*, tome XVIII, fasc. 2, p. 119; t. XIX, fasc. 2, p. 102; t. XX, fasc. 2, p. 619. Cette méthode paraît être due à Dudley Baxter. (*National income*, 1868; *Actes du Congrès de statistique de La Haye*.) M. Dugé de Bernonville l'utilise dans l'article déjà cité.

individuelles en notant toutes les différences de salaires chacun à chacun. On aura ainsi une autre répartition déduite de la première et toute grandeur significative de cette seconde répartition pourra représenter l'inégalité. M. Gini et, après lui, M. March utilisent la moyenne, d'où la caractéristique « *différence moyenne* ». Le *mode* serait peut-être plus indiqué si sa détermination n'était pas délicate. Le calcul de cette différence est long, aussi son emploi ne s'est pas généralisé, de plus si elle résume bien les opinions individuelles, elle est d'interprétation obscure. On peut relier cette méthode à une caractéristique déjà connue et de calcul très facile. En effet la dispersion de la seconde répartition (c'est-à-dire son écart quadratique) est, comme on le démontre facilement, le double de celle de la répartition primitive. On aboutit ainsi à l'écart quadratique comme mesure de l'inégalité. Il a le gros défaut de ne pas permettre de distinguer les répartitions symétriques de celles qui ne le sont pas.

Signalons que M. March, pour mesurer la concentration des entreprises, utilise le rapport du personnel utilisé dans les établissements de plus de 50 ouvriers au total des ouvriers¹. C'est exactement la définition de Pareto que nous exposons au début de ce chapitre, elle prête évidemment aux mêmes critiques.

§ 7 Les caractéristiques dépendantes d'un ajustement préalable. — Pearson introduit deux constantes B_1 et B_2 définies à partir des moments, et indépendantes de l'échelle choisie pour la variable. Ce sont l'*asymétrie* et la

1. La concentration dans les entreprises industrielles et commerciales: série de leçons faites à l'Ecole des Sciences politiques, par MM. Arthur Fontaine,¹ March. de Rousiers, Samazeuilh, Sayous, Veillet, Weiss. (1913, Alcan).

voussure. Elles jouent un rôle important dans la détermination du type et des constantes. Elles ne peuvent guère servir pour une définition de l'inégalité, leur interprétation simple étant inconnue¹.

Nous avons vu la définition de Pareto, $u(x) = \frac{N(x)}{N(h)}$ $N(x)$ désignant le nombre d'individus, dont le revenu est supérieur à x . Elle avait le grand avantage de relier l'inégalité au paramètre α de la formule $N(x) = \frac{A}{x^\alpha}$. On démontre en effet sans difficulté que l'inégalité varie comme α . Pareto a pu ainsi dresser facilement un tableau des inégalités des revenus dans différents pays. D'autre part les déductions mathématiques sont facilitées par cette propriété. M. Frechet ne propose pas une nouvelle définition, mais pense qu'on pourrait définir un indice d'inégalité par une moyenne convenablement définie des valeurs de la quantité $\frac{R}{Nx}$ quand x ou N varie. On remplacerait en somme la répartition primitive par celle des $\frac{R}{Nx}$ et on caractériserait cette dernière au mieux. (Nous rappelons que $\frac{R}{Nx}$ est peu variable puisque la loi de Pareto représente à peu près l'observation).

§ 8. M. le baron Mourre dans deux études parues dans le *Journal de la Société de statistique de Paris* (1922, p. 215; 1929, p. 285) a donné une définition de l'inégalité qui se déduit de celle de Pareto comme la médiane se déduit de la médiane, et les quartals des quartils. « Nous appellerons *rapport d'inégalité* le rapport de la somme des revenus dépassant la fortune moyenne à la somme des fortunes

1. Cependant, d'après les indications fournies par M. A. Simionov, la statistique des assurances sociales russes, à Moscou, a constaté que pendant la période précédant la guerre et la révolution, l'inégalité des revenus des ouvriers décroissait, 1918, année de la révolution, présentant un point critique. Or ce travail avait été effectué au moyen des courbes de Pearson.

inférieures à la fortune moyenne. Ce rapport, comme on le voit facilement, ne dépend que de α et varie comme lui. » Il a utilisé ce rapport non seulement entre le revenu minimum et l'infini, mais dans une tranche quelconque. L'étude mathématique devient difficile; M. Mourre ne l'a pas faite, mais a calculé un certain nombre de valeurs de ces rapports et tenté ainsi de montrer qu'ils varient aussi comme α . Toutes ces définitions sont préférables à celle de Pareto, car elles correspondent à l'idée que l'on se fait de l'inégalité, opposant la masse de la fortune des riches à celle des pauvres, la moyenne servant de séparation. Nous remarquerons que pour les répartitions à forte inégalité comme celles des revenus, la moyenne est très rapprochée du revenu minimum et ne peut représenter la séparation entre classes. Exemple, en France pour l'impôt général sur le revenu (revenus de 1927), le minimum est 7.000 fr., la moyenne 22.300 fr., la médiale qui partage en deux parties égales la somme des revenus est très voisine de 30.000 fr. Enfin le calcul pour des tranches limitées du rapport d'inégalité ne peut s'effectuer pour une répartition observée, les séparations fiscales ne s'y prêtant pas. Il est même fort difficile de ce fait d'obtenir une valeur suffisamment précise du rapport principal (entre h et l'infini).

§ 9. Utilisation de la formule de l'effet proportionnel. —

On peut songer d'abord à appliquer les définitions précédentes qui peuvent être retenues. La formule utilisant trois constantes a , b , x_0 , l'inégalité s'exprimera en fonction d'elles. On peut dire à priori que la meilleure définition sera celle qui correspondra aux idées courantes et qui sera commode à appliquer. Comme le dit Pareto, « sauf

le cas de nécessité absolue, il faut se résigner à ne pas trop heurter les préjugés courants ».

Pour ne pas ralentir l'exposé et le rendre accessible au plus grand nombre, nous rejetons en Annexe les calculs.

Le lecteur voudra bien admettre ici les résultats.

L'*interquartil relatif* ne dépend que de a , on a la formule.

$\frac{Q_2 - Q_1}{M} = \frac{2,20}{a}$. Donc prendre l'interquartil relatif comme mesure de l'inégalité revient à prendre l'inverse de a .

Le *rapport des quartils* introduit seulement a . En effet $\log \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{0,95}{a}$.

L'*écart quadratique* qui se relie à la théorie des différences de M. Corrado Gini, rapporté à la médiane pour ne pas dépendre de l'unité adoptée pour la variable, ne dépend aussi que de a .

Il est égal à : $K \sqrt{K^2 - 1}$ avec $K = e^{\frac{1}{4a^2 \log^2 e}}$.

Il varie donc aussi comme l'inverse de a .

Il en est de même des coefficients de Pearson comme les formules de l'Annexe (§9) le montrent. L'asymétrie, la voussure et le paramètre X de Pearson ne dépendent que de a .

Le rapport d'*inegalité* principal de M. Mourre varie en même temps que l'inverse de a .

Tous ces résultats¹ nous conduisent invinciblement à prendre comme indice d'inégalité dans le cas de l'application de la loi de l'effet proportionnel l'inverse de a . Afin d'éviter l'emploi de décimales et pour nous conformer à l'usage général en matière d'indices, nous utiliserons $\frac{100}{a}$ que nous noterons C .

1. Pour ne pas allonger outre mesure cet exposé, nous ne parlons pas ici des relations de a avec l'interquartil ou le rapport des quartils (?). Nous aurions toujours à répéter le même résultat.

Notre indice d'inégalité C peut donc être interprété de multiples manières : écart quadratique, interquartil relatif, rapport d'inégalité. Toutes ces mesures de l'inégalité sont en fait équivalentes. Leurs variations sont parallèles, seule l'échelle change.

§ 10. **Résumé.** — Pour toutes les répartitions qui suivent la loi de l'effet proportionnel, l'indice d'inégalité $\frac{100}{a}$ varie de la même façon que l'écart quadratique les indices déduits des quartils, le rapport d'inégalité, etc... Il possède tous les avantages particuliers de ceux-ci, mais leur est préférable, car il utilise l'ensemble de la distribution¹.

1. De plus, comme on l'a vu au chapitre V, sa détermination au moyen d'un graphique permet, commodément, de se rendre compte des erreurs à envisager et des divergences de la distribution envisagée avec la distribution théorique.

La mobilité d'une variable économique. — L'interprétation d'une répartition par la loi de l'effet proportionnel, peut être appelée dynamique, puisqu'elle repose sur les variations continues de l'entité économique considérée, le revenu par exemple. Sa variation dx est proportionnelle à $x - x_0$ et à dz (z étant une variable normale). Le coefficient de proportionnalité mesure ce que l'on peut appeler la *mobilité relative* de x et la loi de l'effet proportionnel exprime que cette mobilité relative est constante pour toute la répartition. On peut la mesurer par l'indice d'inégalité, ce qui donne une interprétation dynamique de celui-ci.

Pareto a écrit, à propos de la courbe des revenus : « Sa forme varie très lentement, elle peut donc être supposée à peu près constante en moyenne et pour un temps très court. Mais les molécules dont se compose l'agrégat social ne demeurent pas en repos, des individus s'enrichissent, d'autres s'appauvrissent. Des mouvements intérieurs agitent donc l'intérieur de la courbe. » L'indice d'inégalité que nous introduisons montre que d'une extrémité à l'autre de la courbe, les mouvements « moléculaires » se font à mobilité constante.

RESUME DE LA PREMIERE PARTIE

Une série statistique (ou répartition ou distribution) peut sous l'hypothèse de continuité, se représenter graphiquement par une courbe de fréquence.

On peut remplacer la masse énorme de chiffres de la série statistiques par la donnée d'un petit nombre de grandeurs représentatives. Les plus importantes sont la moyenne, la médiane, l'écart quadratique dont l'inverse peut servir d'indice de solidarité (exemples économiques au Chapitre II). On les tire commodément du graphique de la courbe de fréquence.

La découverte d'une formule mathématique représentant convenablement une courbe de fréquence est très intéressante pour le statisticien. L'application directe des procédés mathématiques ne paraît pas réussir, les types de Pearson sont trop compliqués, le principe des moments, dangereux. L'équation de Pareto et les généralisations qui ont été proposées sont plus simples. On peut aussi songer à utiliser les formules d'une science particulière, le calcul des probabilités. Un raisonnement, dû à un astronome hollandais, Kapteyn, permet de le justifier. Seule, la formule de Laplace, qui représente la célèbre courbe en cloche, paraît posséder un intérêt général pour les répartitions économiques mais elle ne peut servir que pour les répartitions symétriques malheureusement, peu fréquentes en Economie politique. Il faut donc chercher à étendre le raisonnement de Kapteyn, de façon à obtenir une formule, qui représente les répartitions économiques. Une extension, particulière, *l'effet proportionnel*, suffit pour représenter convenablement un très grand nombre de séries économiques. On l'appelle ainsi, parce qu'elle suppose que les logarithmes de la variable considérée (salaire, revenu, etc...,) forment une répartition symétrique et même d'une manière plus précise une répartition de Laplace (courbe en cloche).

Cette représentation satisfaisante suggère l'idée d'une interprétation des répartitions. En d'autres termes *tout se passe comme* si les hypothèses qui donnent naissance à la formule étaient vérifiées : c'est la *loi de l'effet proportionnel*. Elle s'énonce ainsi, par exemple, pour la répartition des établissements industriels suivant l'importance du personnel : 1° les causes de « fluctuation » du personnel sont nombreuses ; 2° l'effet *relatif* de ces causes sur le nombre d'ouvriers (ou leur effet relatif sur le logarithme), ne dépend pas de ce nombre d'ou-

vriers ; 3° l'effet de chaque cause de « fluctuation » est petit vis-à-vis du nombre d'ouvriers. En remplaçant le mot ouvriers par revenu et le mot établissement par contribuables, on a la loi correspondante pour les répartitions fiscales et ainsi de suite.

Tout ce qui précède permet de montrer combien une définition de l'*inégalité* est nécessaire. On en a proposé beaucoup, toutes utilisent seulement deux points de la courbe de fréquence, certaines même peuvent s'interpréter dans deux sens différents. Le fait que les répartitions de l'Economie politique satisfont à la formule de l'effet proportionnel, permet de définir très simplement un indice d'inégalité, qui varie dans le même sens que la plupart des indices précédents, qui, par conséquent recevra de multiples définitions, depuis les plus simples, dérivant directement du bon sens (écart quadratique, par exemple), jusqu'aux plus complexes. Sa détermination permet d'utiliser toute la répartition, toute la courbe des fréquences.

Cet indice va nous permettre, dans les lignes qui suivent d'étudier facilement tous les problèmes économiques, où interviennent les répartitions et où il faut mesurer des inégalités¹.

¹ 1. Un répertoire des termes techniques se trouve après la table des matières.

DEUXIÈME PARTIE

L'INÉGALITÉ DANS LA RÉPARTITION DES BIENS

Tout en constatant les très grands services rendus par les hommes d'affaires, et par les juristes à la science économique, nous croyons que la participation de quelques mathématiciens à ces études leur serait aussi profitable qu'elle l'a été aux sciences physiques.

(Colson, préface de *l'Economie rationnelle* de M. Divisia).

SOMMAIRE DE LA DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE I. — *Comment définir et comment étudier l'inégalité de répartition des biens :*

Les deux problèmes de la répartition des biens, le problème économique et le problème social.

La distinction entre l'inégalité des richesses et le paupérisme, la conception de Lassalle.

Historique rapide des études sur la question : Dudley Baxter, Soetbeer et l'école germanique, la découverte de Pareto, la commission de l'Institut international de statistique et Kiaer, Séailles et R. Roy.

Etude des méthodes proposées pour la comparaison des répartitions dans l'espace ou dans le temps .

A) *Les méthodes de pourcentages* : la méthode simpliste et la division en groupes constants ;

L'amélioration de Julius Wolf et les critiques de Vogel, Kiaer, etc. ;

Les méthodes de partage du revenu national, les quartals de Würzburger et les cinquièmes de Kiaer ;

Le partage en classes de pourcentage d'individus constant, Tabovici, Kiaer.

B) *Pareto et ses successeurs* : la ou les formules de Pareto ;

Les rapports d'inégalité de Tabovici et de M. le baron Mourre ;

Les conceptions de Gini, de M. Fréchet ;

Les modifications de Séailles ou de Benini.

Raisons d'emploi de l'indice dérivé de la loi de l'effet proportionnel :

1° L'approximation pour les revenus est meilleure pour la loi de l'effet proportionnel, que pour celles de Pareto ;

2° La loi de l'effet proportionnel est plus générale ;

3° L'indice qu'on en tire se relie facilement à toutes les méthodes utilisées ;

4° La loi de l'effet proportionnel a une base théorique et se relie à la loi de Gauss, admise pour les aptitudes humaines.

CHAPITRE II. — *L'étude des données statistiques.*

La définition précise du revenu et le revenu observable par les procédés de la statistique. Classification succincte des revenus :

SECTION A. *Revenus et fortunes individuelles* — les difficultés des statistiques fiscales, la notion du revenu fiscal :

1° L'impôt général sur le revenu : l'application de la loi de l'effet proportionnel, (Prusse, Oldenbourg), légimité de l'indice pour mesurer l'inégalité. La répartition des revenus en France et le mouvement cyclique des affaires (Lescure). L'influence de la situation de famille. La répartition des revenus dans les Etats de langue allemande, au Japon, à travers le monde. L'inégalité varie peu dans le temps et dans l'espace.

2° L'impôt sur le capital : la loi (Bâle 1454 et 1887) ; l'inégalité des richesses au moyen-âge d'après les documents réunis par Schmoller est très voisine de l'inégalité actuelle (Bâle, Francfort, Augsburg, etc...). Les statistiques modernes, Pays-Bas, Allemagne, indications fournies par certaines répartitions françaises (rentes sur la vieillesse, chèques postaux....)

3° L'impôt sur les successions : leurs particularités, l'indice « fort » et l'indice « faible », l'influence de la division en parts. L'évolution de la répartition des successions en France, dans les départements industriels ou agricoles, aux Pays-Bas (1879-1909), à travers le monde.

4° Conclusion : l'indice qui mesure l'inégalité est très stable, l'inégalité varie peu dans le temps et dans l'espace, le classement des pays suivant leur inégalité des biens est mystérieux.

SECTION B : *Les revenus de la propriété.* — Usage et location.

1° L'inégalité des revenus : Loyers, propriétés foncières et bâties, suivent la loi de l'effet proportionnel. Leur indice d'inégalité reste voisin de l'indice général.

2° L'inégalité des propriétés elles-mêmes : Dépôts de titres, ventes d'immeubles urbains ou ruraux, cotes foncières ou exploitations agricoles confirment les résultats des revenus.

SECTION C : *Les revenus du travail.* — L'utilisation de la loi, l'influence sur l'inégalité des salaires, de la spécialité professionnelle, de la nature de l'industrie, du sexe, de l'âge, de la nationalité ; il ne semble pas qu'il y ait une évolution quelconque dans le temps.

SECTION D : *Le revenu de l'entreprise*. — Son observation est difficile, l'étude des statistiques de dividende (Vander Borcht, Dermietzel, Lescure, Perroux), conduit à admettre la loi et à calculer un indice d'inégalité. Il paraît certain qu'il existe une relation assez étroite entre les variations de l'indice d'inégalité et celles des indices de prix. Les statistiques fiscales sont inutilisables, elles suivent cependant la loi de l'effet proportionnel.

CHAPITRE III. — *Résultats et conséquences.*

1° *La dissémination de la fortune et du revenu* : Chiffres précisant la grandeur de l'inégalité moyenne des répartitions de biens ($C = 100$).

2° *Les variations de l'inégalité des biens dans le temps* : Le progrès tend-il à augmenter l'inégalité ou non ? Les solutions des économistes : Leroy-Beaulieu, de Foville, Pareto, Schmoller. L'étude des statistiques permet de conclure qu'il n'y a pas de tendance de longue durée, mais peut-être une variation cyclique.

3° *Les théorèmes de Pareto* : Il ne semble pas qu'on doive admettre aujourd'hui les démonstrations de Pareto sur la relation entre le « hasard » et la répartition des richesses, et, sur les conditions dans lesquelles on peut relever le niveau minimum et diminuer l'inégalité. Discussion des résultats de M. Mourre.

4° *Les causes de la répartition* : La loi de l'effet proportionnel permet de relier directement le logarithme du revenu ou du capital à toutes les « conjonctures », c'est-à-dire, à toutes les causes inconnues agissant sur ce revenu ou ce capital, y compris l'influence des aptitudes intellectuelles ou physiques.

DEUXIEME PARTIE

L'INEGALITE DANS LA REPARTITION DES BIENS

Cette partie comprendra trois chapitres.

Dans le premier nous étudierons la façon dont on doit poser le problème et l'étudier.

Nous passerons en revue, dans le second, différentes données statistiques intéressant diverses sortes de biens

Enfin, dans le troisième, nous essayerons de mettre en évidence les résultats obtenus et leurs conséquences.

CHAPITRE PREMIER

COMMENT DÉFINIR ET COMMENT ÉTUDIER L'INÉGALITÉ DE RÉPARTITION DES BIENS ?

§ 1. Comme l'a fait remarquer M. Reboud dans son *Précis d'Economie politique*¹, « en vertu d'une habitude ancienne, mais défectueuse on étudie, sous le titre de répartition des biens, deux problèmes très différents, un problème économique et un problème social ».

Le problème économique consiste dans la détermination sous un régime de libre concurrence des prix des services utilisés par les entrepreneurs pour la production. C'est essentiellement un problème d'échange. On peut lui rattacher l'étude de la répartition du revenu global entre les différentes catégories de revenus, salaires, intérêts, rentes, et la recherche de l'évolution des différentes parts dans le temps².

Dans le problème social, il s'agit de la répartition des biens entre les hommes et de l'inégalité que nous constatons entre eux. C'est la question des riches et des pauvres. Les deux problèmes sont distincts par leur objet et aussi

1. *Précis*, tome 2, fasc. 2, p. 395.

2. La bibliographie sur ces problèmes est très abondante. (Leroy-Beaulieu Smart, Carver, etc..) Depuis Ricardo, tous les socialistes ont étudié la répartition du revenu global en plusieurs masses. Nous verrons qu'au contraire sur le problème social, la littérature est rare.

par leur nature, et par leur méthode. La solution du premier résultera d'une chaîne de raisonnements, celle du second de l'observation statistique. Le premier problème peut s'étudier sur l'*homo œconomicus*, le second doit observer l'homme réel, dans la société. Nous ne considérons ici que le problème social.

De son étude, dépend non seulement la solution des problèmes sociaux les plus graves sur l'inégalité des richesses, mais aussi la possibilité de prévisions sur le rendement des impôts nouveaux. Nous en verrons un exemple dans le Chapitre II au sujet de l'établissement de l'impôt sur le revenu en France.

§ 2 Dès le début de cet exposé, il nous paraît nécessaire de bien distinguer l'*inégalité de répartition et le paupérisme*.

Le paupérisme dépend de la limite inférieure des revenus ou plus généralement des revenus les plus faibles. L'inégalité, en principe doit dépendre de toute la répartition¹.

Le mot « pauvreté » a un double sens, un sens absolu, le manque de ressource pour lutter contre la faim, le froid, la maladie... et un sens relatif, l'écart avec les jouissances des classes supérieures. Leroy-Beaulieu, dans son *Essai sur la répartition des richesses*, nie ce double sens, mais Lassalle², ne s'y est pas trompé : « Quand vous entendez parler de la classe laborieuse et de l'amélioration de votre sort, vous entendez parler de votre situation comparée à

1. En mathématiques on dirait que l'inégalité est une *fonctionnelle* de la répartition.

2. Lettre ouverte au Comité central pour la convocation d'un congrès général des travailleurs allemands à Leipzig (1863). On voit que la citation conduirait à introduire un indice d'inégalité voisin de la différence moyenne de Gini, chaque situation comparée avec toutes les autres successivement. On verra dans *Meltron*, les articles de F. Vinci (I, I 62), de Saibante (VI, I, 165), de Gini (VIII, 3, 30), etc. Nous y reviendrons.

celle de vos concitoyens dans le présent, comparée par conséquent avec la mesure moyenne des habitudes dans le temps actuel... La situation de chaque classe a toujours pour unique mesure la situation des autres classes dans le même temps... Votre situation comme homme est donc restée la même, car elle ne se mesure pas comparativement à la situation de l'animal dans la forêt vierge, ou comparativement à celle du nègre de l'Afrique, ni à celle du serf d'il y a deux cents ans, ou même d'il y a quatre-vingt ans; elle n'a d'autre mesure que celle de vos compagnons de l'humanité, que celle des autres classes dans le temps où vous vivez¹ ».

En d'autres termes, ce qui intéresse Lassalle, ce n'est ni la masse totale de biens répartis, ni la moyenne, ni le revenu minimum ou le paupérisme, c'est l'*inégalité de la répartition*.

§ 3. Ce problème de l'inégalité a été étudié pour la première fois, semble-t-il, par Dudley Baxter en 1868². Le premier, il se préoccupa de rassembler des documents statistiques. A. Soetbeer, ensuite, étudia les revenus prussiens en 1879³.

Différents auteurs s'occupèrent ensuite de la question

1. Leroy-Beaulieu (*Essai*, p. 47) commente ainsi ce passage : « Sans doute Lassalle aimerait mieux que la classe ouvrière fut plus misérable mais qu'il y ait moins de distance entre elle et les classes supérieures. » De là Leroy-Beaulieu déduit fort injustement. Lassalle croit que l'homme social aurait principalement des besoins de vanité d'ambition de jalousie, et d'envie, etc. Le passage de Lassalle est cité dans tous les *Cours d'économie* : Pareto, t. II, n° 964, Reboud, 2, 641; Truchy 2, 248, etc...

2. *Baxter National income and taxation of the United Kingdom*. Comptes rendus des travaux de la 7^e session du Congrès international de statistique de La Haye (Seconde partie, p. 530, 1870).

3. A. Soetbeer, *Umfang und Verteilung des Volkseinkommens in Preussischen Staaten 1872-78* Leipzig 1879

On peut citer Bucher¹, Nitschke, Vogel, Giffen, Wagner, Schmoller, Evert, Huncke, Würzburger, Warming, etc...

Un grand progrès fut marqué lors de la découverte de Pareto. Comme l'a écrit M. le baron Mourre, « il est très difficile d'exprimer par une formule mathématique un phénomène économique et social et le fait d'y réussir constitue presque toujours un progrès important². »

Cette découverte renouvela la question et comme on se préoccupait au même moment d'introduire dans les systèmes fiscaux de nombreux pays les impôts sur le revenu, le Congrès international de statistique confia l'étude de la répartition des biens à une commission spéciale. Le premier rapport vit jour à la session de Berlin de 1903. Il est reproduit dans l'article cité de Ad. Wagner. Kiaer, directeur du bureau central de statistique de Norvège, secrétaire de la commission à partir de 1908, se fit une véritable spécialité de cette question et nous aurons fréquemment à utiliser ces rapports. De plus il réunit fort utilement un très grand nombre de documents statistiques.

Vers la même époque, se place une thèse de J. Séailles sur les statistiques successorales (Paris 1909).

1. Bücher K., *Basels staatseinkommen und steuerverteilung*, 1878-1887, Bâle, 1888.

Nitschke, *Vogel Statistische Monatsschrift (Österreich)*, 1912, IX.

Huncke, *Allgemeines statistisches archiv*, 1907, p. 90.

Wagner, « Statistik des Volks-oder Nationaleinkommens ». (*B. I. I. S.* 1905, XIV, 3, 1.)

Schmoller, « Die einkommen Verteilung in alter und neuer Zeit ». (*B. I. I. S.*, 1905, IX, p. 1.)

Würzburger, *Zeitschrift des Königlichen Sachsischen statistischen Bureau*, 1904, II.

Warming, *Nationaløkonomisk-Tidsskrift*, 1907, 401, etc.

Citons cependant encore l'ouvrage de Tabovici, *Die statistik der Einkommenverteilung*. Nous avons borné la liste précédente aux travaux anciens, elle n'est d'ailleurs certainement pas complète.

2. *Journal Société de Statistique de Paris*, 1922, p. 215.

Mais depuis la guerre, l'attention de l'Institut international a été attirée sur des problèmes d'actualité plus brûlante et la question n'a pas été reprise. On doit cependant citer un mémoire de R. Roy sur la « demande dans ses rapports avec la répartition des revenus¹ » où la liaison des deux problèmes de répartition, économique et social, est faite au moyen de la formule de Pareto.

§ 4. Nous allons maintenant passer en revue les différentes méthodes qui ont été proposées pour étudier les répartitions de richesses. On peut les classer en deux groupes, suivant qu'elles sont indépendantes d'une formule d'ajustement ou non. Pratiquement ici cette formule est celle de Pareto.

Nous verrons ensuite comment la formule de l'effet proportionnel et l'indice introduit dans la première partie de cet ouvrage (Chapitre VII) permettent de condenser toutes les méthodes en une seule plus rapide et plus précise.

§ 5. A) **Les méthodes de pourcentages.** — 1. La méthode la plus simple — elle vient immédiatement à l'esprit — consiste à *comparer des nombres proportionnels des revenus de différentes catégories à des époques différentes*. Le pourcentage, par exemple, des revenus supérieurs à 100.000 fr. est plus élevé en 1900 qu'en 1910, etc... Admettons qu'il en soit ainsi pour tous les revenus élevés et qu'au contraire, les tranches correspondant aux revenus les plus faibles décroissent, on dira que l'inégalité a décréu. On peut dire, sans exagération, que ce procédé est universellement

1. *Melron*, tome VIII, fasc. 3, p. 101. Nous n'étudierons pas ici les conséquences de l'introduction dans les raisonnements de R. Roy de notre formule de l'effet proportionnel.

employé dans toutes les branches de l'Economie politique et c'est contre lui surtout que ce livre est écrit. Sa nocivité est considérable. C'est, en particulier, la méthode utilisée par Leroy-Beaulieu dans son ouvrage sur la répartition des richesses, et cela suffit à enlever toute valeur à ses conclusions. C'est celle de Schmoller dans ses études sur les répartitions de richesses¹, de Takano dans son travail sur le revenu japonais² (chapitre II, § 14) M. Perroux, après MM. Dermietzel et Lescure, faute de mieux, l'emploie dans son grand ouvrage sur le profit, etc... Parfois la division en groupes n'est pas celle des données statistiques, mais est faite *a priori*. Il y a alors l'amorce d'un progrès³. Ainsi K. Bücher, dans les articles que nous avons cités, divise les individus d'un pays en pauvres, possédants le strict nécessaire à revenus moyens copieux, grands, très grands. Pour Bâle, vers 1880 cela correspond aux tranches (en francs) : 0-1500; 1500-3000; 3000-6000; 6000-12000; 12000-40000; et au-dessus de 40.000.

Nous discutons plus loin (chap. II) cette méthode sur des exemples numériques, Kiaer a fort bien indiqué son défaut capital⁴ : « On a souvent tâché de mesurer le développement d'une distribution en comparant le nombre proportionnel des revenus de différentes catégories

1. Nous la discutons en détail sur des exemples précis dans le second chapitre.

2. Nous le discutons aussi en détail dans le second chapitre.

3. Cela constitue un progrès, car on aurait pu avoir l'idée de modifier les limites en unités monétaires d'une époque à l'autre de manière à conserver les mêmes niveaux réels. On arriverait aux méthodes de Würsburger et de Kiaer.

4. Dans la troisième partie, nous reprenons cette discussion à propos de l'inégalité des entreprises. La citation de Kiaer est tirée de son article du *B. I. I. S.*, XVIII, 2, 119. L'insuffisance de cette méthode a été assez souvent reconnue à l'étranger, citons Julius Wolf, Soetbeer, Huncke, Nitschke.

à des époques différentes. Mais tant que dans ses comparaisons on s'est servi des mêmes catégories de revenus sans prendre en considération que l'échelle devait être changée en rapport avec le revenu moyen, ces calculs n'ont pu donner de résultats clairs parce que le progrès général des revenus a pour effet de faire passer un nombre plus ou moins grand d'individus des classes inférieures dans les classes supérieures en faisant croître surtout la catégorie comprenant les revenus les plus élevés ».

§ 6. 2. Un essai d'amélioration fut tenté par Julius Wolf qui observa qu'on ne devait pas comparer les chiffres des mêmes catégories, mais l'augmentation des chiffres d'une catégorie quelconque en y ajoutant celle de la catégorie supérieure avec les chiffres de la catégorie inférieure à la première époque. Prenons un exemple. Le tableau XIV donne pour la Saxe Royale en 1879 et en 1890 le nombre de contribuables dans un certain nombre de tranches.

*Tableau XIV. — Répartition des revenus en Saxe Royale
Méthode Wolf*

Tranches	1879	1890	Variations
0 à 500	560.210	546.138	— 2,5%
500 à 800	270.246	401.439	+ 48,5%
800 à 1.600	165.699	318.125	+ 92,0%
1.600 à 3.300	62.140	91.124	+ 47,0%
3.300 à 9.600	24.140	36.841	+ 50,0%
9.600 et plus	5.293	10.402	+ 96,0%
TOTAL	1.087.728	1.404.069	+ 29,1%

La méthode de comparaison brute se contente des % de variations ; elle conduit immédiatement à l'idée que l'inégalité a beaucoup varié. M. Wolf compare la somme de

l'accroissement de la deuxième et troisième classe et la rapporte à la première

$$\frac{131\ 93 + 152\ 426}{560\ 210} = 50,6 \%$$

Il trouve ainsi pour les différentes tranches, 50,6 %, 67,2 et 21,2. Cette méthode, quoique plus compliquée, donne lieu aux mêmes critiques que la précédente¹. On voit très difficilement dans quelle mesure elle peut y répondre. De plus il faut penser que de nombreux individus émergent, par suite de l'accroissement général des revenus, de la région des non taxés dans celle des contribuables.

§ 7. 3. Nous réunirons ensemble les méthodes que Kiaer appelait méthodes du *partage du revenu national*. Elle consiste à diviser les individus jouissant de revenus en classes telles que le total des revenus de chaque classe, soit une fraction du revenu total.

Cette méthode a été proposée pour la première fois par Würzburger en 1904 et appliquée au Danemark par M. Warming. Ils divisaient le revenu total du pays en quatre (méthode des quartals²).

Pour le développement des répartitions de revenus de la Saxe royale de 1888 à 1906, Würzburger trouve une diminution du nombre de la première classe, accusant une certaine concentration des revenus les plus hauts contrebalancée par une augmentation de la seconde classe. Nous verrons dans le chapitre suivant (§ 13) ce qu'il faut en penser, cette méthode prête aux mêmes critiques que

1. Kiaer cite parmi les principales critiques, celles de Vogel, Huncke et Tabovici. Nous avons indiqué les sources.

2. Voyez pour toutes ces expressions statistiques la première partie, en particulier le chapitre VII.

celle de Kiaer qui lui ressemble étrangement. Kiaer divise le total en cinquièmes¹, puis il compare les pourcentages des revenus individuels compris dans les différents cinquièmes et les limites inférieures du revenu de chaque cinquième.

§ 8. Ainsi pour différents pays aux environs de 1905, il trouve pour le nombre proportionnel (pour 100.000) des revenus du deuxième cinquième², 2.895 (Grande-Bretagne), 8.000 (France), 7.603 (Prusse), 7.273 (Saxe) 8.669 (Danemark), 8.029 (Suède), 8.582 (Norvège). Les limites inférieures de cette tranche sont en francs successivement, 6.875, 2.420, 2.238, 2.875, 2.085, 1.390, 1.450.

Pour chaque cinquième, Kiaer traîne ainsi deux chiffres et sa comparaison doit résulter de dix nombres par pays. Il essaye de simplifier en considérant les rapports des revenus moyens pour chaque groupe aux moyennes générales. Il obtient les rapports suivants en %.

Angleterre	7.583	691	153	73	35,5
France	1.767	252	»	»	»
Prusse	2.045	263	118	75	41,7
Saxe	1.637	275	118	74	42,4
Danemark	1.015	231	119	76	43,4
Suède	1.709	249	118	78	41,4
Norvège	912	233	128	80	52,7

Le groupe de revenus les plus élevés jouit, suivant les pays, d'un revenu de 76 à 9 fois le revenu moyen. Kiaer conclut que les « *contrastes sont mis en relief peut-être d'une manière trop prononcée* ». En effet, on peut montrer mathé-

1. Il a surtout exposé cette méthode dans le *B. I. I. S.*, XVIII, 2, 119, « Rapport sur la répartition sociale des revenus ». Il y propose notamment un procédé curieux pour découvrir les tableaux statistiques incomplets, en prenant le rapport entre le nombre des revenus compris dans ces tableaux et le chiffre de la population adulte. Ce rapport doit être voisin de 60 %.

2. Il ne peut, en général, déterminer le premier cinquième, par suite des exemptions de taxation.

matiquement que cette méthode atténue les différences pour les tranches du centre et les exagère pour les extrêmes. Son principal inconvénient est d'exiger une préparation compliquée des statistiques, or, celles-ci ne s'y prêtent pas et les résultats sont ou bien des points d'interrogation ou des chiffres très incertains¹.

§ 9. 4. Kiaer devant cet échec a proposé ainsi que Tabovici, de ranger les individus en classes dont chacune présente un nombre proportionnel d'individus uniforme par rapport à la population. Ainsi Tabovici met dans la première classe pour 100.000 revenus les 100 revenus les plus élevés, dans la seconde les 1.600 suivants, puis les 6.300, les 21.000, une dernière classe enfin comprend les 71.000 restants.

Ces divisions correspondent dans l'esprit de ce statisticien aux très riches, riches, moyens, peu aisés et pauvres.

Nous ignorons comment Tabovici a déterminé ces limites, très probablement par l'observation de plusieurs tableaux statistiques. Mais la première classe représente peu de personnes pour être à l'abri de variations accidentelles et la dernière est beaucoup trop surchargée. Ces raisons décidèrent Kiaer à modifier les limites. Il met dans les classes les nombres suivants : 1.000, 6.000, 16.000, 27.000, 50.000².

1. Voici l'opinion mélancolique de Kiaer : « Les différences dans les groupes supérieurs qui sont très prononcées tant en ce qui concerne le nombre relatif des personnes que pour l'échelle des revenus s'égalisent de plus en plus à mesure qu'on descend dans les groupes inférieurs, surtout au point de vue du nombre des personnes, mais aussi dans les derniers groupes au point de vue de l'échelle des revenus; les calculs sont du reste très incertains. »

2. Si nous voulions appliquer une méthode semblable, en admettant la loi de l'effet proportionnel et les limites extrêmes 1.000 et 50.000, nous diviserions l'intervalle correspondant pour notre variable z (voyez la première

Cette méthode a encore le gros inconvénient d'exiger une préparation très dangereuse des données statistiques. Voici pour la tranche supérieure et les données précédentes la limite inférieure du revenu et le revenu moyen.

Angleterre	18.000	65.218
France	11.500	27.300
Saxe	9.400	31.438
Prusse	9.094	28.950
Danemark	7.915	19.653
Suède	7.570	17.675
Norvège	5.486	11.935

Les différences sont dans le même sens que précédemment, mais elles ont subi des modifications qui se présentent « *d'une manière plus correcte* » Kiaer indique que cette méthode semble mieux se prêter à faire voir le développement des distributions¹.

En dehors de l'incertitude des calculs, cette méthode, quoique théoriquement correcte, présente l'inconvénient de n'utiliser qu'un petit nombre de points de la courbe de distribution. De plus ne réunissant pas en un seul coefficient les caractéristiques de l'inégalité, elle ne permet pas une étude facile et rapide de nombreuses distributions.

Il faut remarquer que ce progrès ne pouvait être obtenu que lorsqu'on connaîtrait une formule représentant même approximativement la répartition. C'est ce qui explique l'importance de la découverte de Pareto.

partie) en trois parties égales. De cette façon les tranches seraient toutes d'égale importance pour l'inégalité.

Il est fort curieux de remarquer que ceci conduit presque aux divisions de Kiaer, on a, en effet, 1000, 5.380, 15.970, 27.650 et 50.000. Ceci montre que Kiaer possédait un sens statistique très précis.

1. A cette méthode se rattache la méthode des quartils utilisée par M. Dugé-de Bernonville dans le *Bulletin S. G. F.*, pour le salaires et les revenus (1913, 2, 400). Nous montrerons dans le chapitre II comment on peut passer de cette méthode théoriquement correcte mais mal commode à celle dérivée de la loi de l'effet proportionnel.

B) Pareto et ses successeurs

§ 9. Pareto, comme nous l'avons vu¹ en se basant sur les données expérimentales, a établi trois formules à deux, trois ou quatre constantes. La plus simple, qui est la plus importante, exprime qu'en portant en abscisses les logarithmes du revenu x et en ordonnées les logarithmes du nombre N des contribuables de revenu plus grand que x , les points obtenus se placent en ligne droite. Cette formule donnait une approximation remarquable pour l'époque (nous en donnons des exemples dans le cours de cet ouvrage). On lui a reproché de ne pas être vérifié aux extrémités de l'intervalle. On ne pouvait, dès le début, obtenir une formule définitive².

On a été, dans la critique de Pareto, jusqu'à se demander si les logarithmes ont une valeur figurative réelle³. La définition de l'inégalité que Pareto déduisait de sa formule, la pente de sa droite, peut, comme nous l'avons dit au chapitre VII, être interprétée de deux façons. Aussi M. le baron Mourre, dans deux communications à la Société de Statistique de Paris (1922, 215) et (1929, 285) a proposé d'autres définitions que nous avons déjà critiquées. Il ne paraît pas d'ailleurs qu'elles aient été utilisées pratiquement.

1. Chapitre III, 1^{re} partie.

2. Voici ce que déclarait M. Emile Borel, le grand mathématicien, président une séance de la Société de statistique de Paris en 1922 : « La formule donnée par ce savant économiste pour la mesure de l'inégalité des fortunes est évidemment empirique; elle ne saurait, par suite, être vérifiée rigoureusement aux deux limites de l'intervalle dans lequel on l'étudie. » La formule de l'effet proportionnel n'étant pas empirique, pourra prétendre être valable aux extrémités.

3. Séailles, thèse p. 47. Il argue que leur emploi fausse l'aspect de la courbe qu'il cherche à tracer. Chatelain, avant lui, dans un article de la *Revue d'Economie politique* (1907, p. 361) rejetant les logarithmes, arrivait à un diagramme de 5 mètres d'ordonnée et de 77 centimètres d'abscisse.

§ 10. Tabovici dès 1906 avait utilisé un coefficient d'inégalité « Ungleichheitskoeffizient » en divisant le revenu moyen de sa classe la plus riche (les 100 premiers sur 100.000) par le revenu moyen de l'ensemble des autres classes, et rattaché ceci au coefficient de Pareto. Mais sa première classe était trop petite pour que les erreurs accidentelles ne tiennent pas un rôle trop important.

§ 11. Les conceptions de M. Gini sur la « différence moyenne » ont été reliées à la formule de Pareto. Le calcul de son « *indici di concentrazione e di dipendenza*¹ » donne un indice d'inégalité d se reliant à l' α de Pareto.

d se définit par l'égalité $\frac{N}{N_0} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^d$

R est le montant total des revenus supérieurs à x , l'indice zéro correspond à la limite inférieure de taxation.

On en déduit $d = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

Il n'y a donc, en pratique, rien de changé, étant toujours supérieur à l'unité.

La formule de Pareto n'est qu'approximative, avonous dit, aussi la quantité α varie lorsqu'on change les limites du calcul. On a donc proposé de prendre une certaine moyenne des α ou plus généralement une valeur caractéristique de la distribution des α . C'est le cas des méthodes de Gini, de Frechet².

1. Corrado Gini, Biblioteca dell'Economista, 5^e série, v. 120, 1910, *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri* (Atti del R. inst., Venezia, LXXIII, 14, 1913.)

On peut consulter aussi dans *Metron* : F. Vinci, *Sui coefficienti di variabilità* (I, 1, 62); Scibante *I profitti delle società per azioni e la concentrazione dei capitali industriali* (VI, 1, 165) et *La concentrazione della popolazione* (VII, 2, 53); R. Roy, *La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus* (VIII, 3, 101). Un article récent de M. Gini dans *Metron* : « Sul massima degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni » (VIII, 3, 30), est indépendant des lois mathématiques envisagées.

2. Chapitres III et VII de la première partie.

Une autre extension des formules de Pareto consiste à modifier la formule de manière à ce qu'elle représente mieux les faits, c'est ce qu'ont tenté MM. Séailles et Benini tout en en conservant le caractère¹.

Ces essais, et nous ne les citons pas tous², ne paraissent pas avoir détourné l'attention de la formule de Pareto qui a pour elle la simplicité.

En d'autres termes, la discussion ne peut porter que sur la ou les formules de Pareto, le rapport d'inégalité de M. Mourre étant adopté pour éviter les doubles sens.

§ 12. Nous utiliserons la loi de l'effet proportionnel dans l'étude qui va suivre parce que :

1° L'approximation est meilleure pour les revenus comme le montrent les comparaisons que nous avons faites : ainsi pour les revenus d'Oldenbourg, où Pareto utilise quatre paramètres, il a 8 % d'erreur en moyenne et la loi de l'effet proportionnel, 2 %, etc...

2° La loi de l'effet proportionnel se vérifie pour un grand nombre de répartitions où la loi de Pareto n'existe

1. Voici la formule de M. Séailles (thèse, chapitre III) :

$$(\log x)^2 = 2p \log N + q$$

Benini dans ses *Principii di statistica methodologica*, prend :

$$\log y = a - b (\log x)^3$$

2. Au sujet de l'étude de M. Edgeworth (*B. I. I. S.*, XVIII, I, 220) sur l'application du calcul des probabilités à la statistique, M. Borel a fait observer que la forme intégrale

$$\int f(t) e^{K(e^{-t})^2} dt$$

résultant de la superposition d'une infinité de groupes normaux variant continuellement, pouvait représenter n'importe quelle fonction. On pourrait aussi songer à appliquer le calcul des variations d'une manière analogue à celle de Luigi Perozzo pour les questions de statistique démographique (*B. I. I. S.*, XVIII, I, 289). C'est l'application de la méthode de Ritz. Nous estimons que pour le moment l'application de la loi de l'effet proportionnel suffit aux besoins.

plus, salaires, profits¹, successions etc..., elle a une plus grande généralité.

3° L'indice tiré de la loi de l'effet proportionnel (chapitre VII, 1^{re} partie) peut se relier à toutes les méthodes employées jusqu'ici. Nous l'avons montré dans le chapitre VII. Il permet donc d'utiliser les travaux de nos prédécesseurs².

Nous avons vu que *l'écart quadratique, la différence moyenne, le rapport des quartils, l'interquartil relatif* ne dépendait que de l'indice C de la distribution. Les employer revient donc à utiliser notre indice. L'échelle seule différera.

On verra dans l'Annexe que les méthodes des *quartals* ou des *cinquièmes* reviennent à déterminer notre indice au moyen d'un petit nombre de points. Il en est de même des méthodes de *Kiaer* ou de *Tabovici*.

Notre indice a donc à l'échelle près toutes les significations précédentes y compris celles de l'indice de Pareto ou de M. Mourre³, à la condition qu'on admette la loi de l'effet proportionnel. Mais il a en plus l'avantage d'utiliser toute la courbe (détermination graphique) et de ne pas demander une préparation statistique, les données expérimentales sont utilisables instantanément.

4° Enfin, et c'est là plutôt une raison de sa réussite

1. M. Perroux, dans sa thèse, indique que M. Ottolenghi s'est, sans succès, efforcé de construire une courbe de distribution des profits. Cependant, dit-il, l'observation courante et les travaux scientifiques établissent qu'une répartition très analogue se retrouve dans les sociétés contemporaines. Ceci rattache la courbe des profits à celle des erreurs comme le fait la loi de l'effet proportionnel.

2. Pour les salaires (chapitre suivant, section C) nous avons pu utiliser directement, sans contradiction, les résultats de M. Dugé de Bernonville.

3. Pour cela il faut prendre comme nouvelle origine des revenus la limite x_0 . Cela est fort compréhensible quand x est la limite de taxation, nous verrons malheureusement qu'il n'en est pas toujours ainsi. Toutes les formules sont démontrées dans l'Annexe I.

que de son emploi, il a une base rationnelle et la formule de la loi de l'effet proportionnel se relie directement à la loi de Gauss, comme le souhaitait intuitivement M. Perroux, pour les profits.

Nous avons vu dans la première partie (chapitre V) comment on appliquait la loi de l'effet proportionnel et comment on la vérifiait. La valeur de l'indice s'en déduisait immédiatement. Les exemples III et IV de ce chapitre concernent d'ailleurs des statistiques de répartition de richesses.

M. E. Borel, dans son allocution de président de la Société de statistique de Paris en 1922¹, a déclaré à propos de l'utilisation de la fonction de Gauss : « L'application de ces méthodes une fois que la théorie en a été faite une fois pour toutes, ne présente aucune difficulté spéciale, il n'est pas plus compliqué de se servir des tables de la fonction de Gauss que d'utiliser des tables de logarithmes ; tout cela, ce sont des opérations simples de calcul, à peine plus compliquées que les quatre règles et à peine plus difficiles à savoir manier avec aisance, lorsqu'on s'en sert fréquemment ».

Aussi espérons-nous vivement qu'aucun lecteur n'éprouvera de difficulté à nous suivre et à nous contrôler dans les applications que nous allons maintenant aborder.

1. *Journal de la Société*, 1922, p. 43.

CHAPITRE II

L'ETUDE DES DONNÉES STATISTIQUES

§ 1. « Le revenu d'une personne est le *flot des satisfactions* qu'elle se procure pendant une année ou une autre unité de temps, ou pratiquement c'est le flot des biens économiques qu'elle reçoit ou qu'elle consomme et des services personnels dont elle retire des satisfactions pendant la période de temps considérée¹. »

Ce n'est pas ce revenu défini de manière précise que la statistique nous permettra d'observer. Elle mesure et dénombre, non le revenu en nature, mais le revenu en monnaie, c'est-à-dire la valeur des biens et des services précédents exprimés en unités monétaires. Elle laisse donc de côté, par cela même, les revenus qui échappent à l'estimation et à la description; en voici une énumération très complète due à William Smart² : 1° services non payés, particulièrement ceux des femmes; 2° accroissement du loisir, là où le travail est dur et ingrat; 3° occupation agréable considérée comme une richesse en soi, indépendamment

1. P. Reboud, *Précis d'économie politique*, tome 2, fasc. 2, p. 389.

2. W. Smart, *La répartition du revenu national*, 1^{re} partie, chap. XI. On pourrait rapprocher ce que nous disons au texte de la loi de l'utilité gratuite de Bastiat. Kiaer dans son rapport (*B. I. I. S.*, t. XVIII, 2, 119) indique les biens matériels et invisibles, amitié, amour, patrie.

du produit; 4° relations personnelles comme produit accessoire; 5° nouveaux genres de produits, qualités améliorées non représentées dans le prix; 6° propriétés ne rapportant pas de revenu et reconstruction générale de ce qui l'entoure; 7° liberté et bon gouvernement; 8° aptitude croissante à en faire usage.

On peut, tout au plus, remarquer que ces revenus tendent certainement à diminuer l'inégalité générale, il est impossible d'en déterminer l'importance.

Nous devons donc les écarter et pratiquement le revenu sera pour nous le revenu fiscal tel qu'il est défini par les divers impôts généraux sur le revenu. Nous verrons en effet que la source unique d'étude du revenu total d'un individu est l'impôt général, complétée, comme l'indiquaient déjà Kiaer et Wagner dans le rapport de la session de Berlin en 1903 de l'Institut international, par les impôts sur les fortunes et les successions. Ces derniers permettent d'étudier la répartition des fortunes, en étroite relation avec celle des revenus¹.

§ 2. En nous bornant au revenu total, nous nous privons bien à tort des nombreux renseignements que la statistique nous fournit sur les différentes catégories des revenus. En dehors du contrôle très utile que nous obtiendrons ainsi, leur étude nous permettra des conclusions importantes sur l'état économique et social du pays envisagé². Pour classer ces différents revenus, nous rappel-

1. Voici la résolution de l'Institut international à la session de La Haye : « L'institut int. de stat. émet le vœu que la question de la statistique des revenus privés soit maintenue à l'étude du comité spécial en lui recommandant d'y ajouter encore l'étude de la répartition des fortunes. » (*Bulletin*, *IXI*, 1, 96.)

2. « Presque chaque sorte d'impôt fournit un matériel statistique qui peut être utilisé pour notre problème ». Wagner, *Statistik des Volks-oder Nationaleinkommens und — Vermögens*. (*B. I. I. S.*, *XIV*, 3, 1.)

lerons que les moyens habituels de se procurer un revenu sont le travail et la propriété. Nous écartons ainsi les procédés illicites (vol, etc.), le jeu et les opérations à titre gratuit.

Travail et propriété se combinent dans l'entreprise, d'où une classification commode : le revenu provient, ou de la propriété (rente, intérêt, prix de location...), ou du travail, le salaire, ou de l'entreprise, le profit. Comme le fait remarquer M. Reboud, ceci correspond aux trois rôles que jouent les hommes dans une production organisée sous forme d'entreprise, ce qui est le cas de la société actuelle.

Nous diviserons donc ce chapitre en quatre parties, étudiant successivement au point de vue de la répartition le revenu total de l'individu, celui de la propriété, celui du travail et celui de l'entreprise. Au premier, nous joindrons l'étude des fortunes et celle des successions.

Section A. — Revenus et fortunes individuelles.

§ 3. Toutes les statistiques que nous allons utiliser sont de source fiscale. Elles ont de nombreux défauts. Kiaer, qui a beaucoup étudié cette question, a, dans son grand rapport de 1914 à l'Institut international¹, présenté un très grand nombre d'observations dont voici les principales :

1° Il y a des pays très importants pour lesquels des données sur le montant et la répartition des revenus manquent absolument, faute de système fiscal adéquat.

2° Le défaut le plus grave consiste en ce qu'on manque

1. *B. J. I. S.*, XX, 2, 619.

presque partout de données concernant les revenus et les fortunes au-dessous d'une certaine limite.

3° L'échelle des catégories n'est pas assez détaillée, ce qui empêche des comparaisons exactes entre les différents pays ou aux différentes époques¹.

4° Dans certains pays, on a des registres spéciaux pour les différentes sources de revenus, fonciers, industriels, etc., mais non de répartition d'ensemble.

5° Il y a des pays où l'on suppose que le revenu moyen des différentes catégories correspond à la moyenne des limites, ce qui est une erreur grave.

6° Des indications sur le nombre des personnes réparties par sexe, âge, état civil et par profession etc., seraient très utiles.

7° Les évaluations officielles sont beaucoup au-dessus de la réalité, certains auteurs estiment qu'elles n'atteignent pas la moitié ! il est donc nécessaire d'avoir des renseignements sur la façon dont on les obtient et dont on les contrôle.

8° Il est nécessaire de prendre en considération les prix des moyens d'existence.

9° La statistique des fortunes est encore moins développée, celle des successions semble plus importante.

Würzburger fit remarquer de plus la difficulté d'éviter les doubles comptages².

§ 4. Aujourd'hui les statistiques sont beaucoup plus nombreuses, plus complètes, plus diversifiées. La liquidation de la guerre a conduit tous les Etats à un système

1. Il indique 1,20 pour rapport des limites des tranches.

2. Würzburger, Zur Frage der Einkommenstatistik. (*B. I. I. S.*, XX, 2, 797.)

fiscal perfectionné qui, partout ou presque, frappe le revenu général; la progressivité de l'impôt a rendu nécessaire la multiplication des divisions, le fisc touche une proportion de plus en plus importante des habitants d'un pays. Par contre, la fraude a dû s'accroître devant des taux exorbitants¹.

Il n'est donc plus besoin de faire appel, comme le voulait Kiaer, à la méthode représentative, c'est-à-dire à des investigations statistiques très complètes, mais portant sur une partie restreinte convenablement choisie de la population (Kiaer en avait fait de nombreuses applications en Norvège où il était directeur du bureau de statistique²).

§ 5. Malgré ces progrès, la comparaison des statistiques, surtout de pays à pays, reste très délicate. La notion de revenu *fiscal* varie suivant les législations. On sait que tout impôt direct fournit des problèmes techniques de trois ordres différents, *la recherche du contribuable*, le débiteur de l'impôt, puis *la détermination du revenu imposable*, et enfin *la liquidation de l'impôt*.

Chacun de ces trois stades donne lieu à des divergences. Tantôt les personnes physiques seules sont frappées, tantôt les personnes morales³. Parfois l'imposition porte

1. En France en 1925 les revenus frappés formaient un total de 45 milliards, à la même époque, M. Colson évaluait le montant des revenus privés à 172 milliards. L'énorme différence s'explique par l'exemption à la base, la sous-évaluation des revenus agricoles et des petits bénéfices commerciaux et certainement aussi par la dissimulation. On admet en général qu'elle diminue dans le même rapport les tranches de revenus. Voyez, par ex., la thèse de Séailles.

2. Consultez, sur cette méthode représentative, l'ouvrage de Bowley 2^e partie, chap. IV.

3. Ainsi Kiaer se plaint (*B. I. I. S.*, XVIII, 2, 119) de la manière dont sont classés les revenus des sociétés par actions. Dans tel pays, les revenus des sociétés sont classés à part et ne sont pas compris dans ceux des propriétaires de ces actions. Dans d'autres, comme l'ancienne Saxe royale, on comprend dans les revenus des individus seulement une partie des dividendes tandis

sur le revenu personnel, parfois sur celui du ménage¹. Le lieu même de la liquidation souvent peut causer des erreurs. Enfin l'imposition du contribuable étranger au pays où il réside est un des problèmes les plus difficiles des droits fiscal et international².

Nous nous contenterons de citer au passage les principales particularités des impôts que nous utiliserons, mais il faut dès maintenant en voir l'importance. Pratiquement, le désir de chaque puissance d'augmenter le rendement de son système fiscal, et par suite de frapper tout le revenu est pour nous une garantie que les diverses définitions fiscales du revenu ne sont pas trop éloignées les unes des autres.

La difficulté sera moins grande pour la comparaison dans le même pays à des époques différentes, et par suite nous pourrons mesurer les variations de l'inégalité avec une précision intéressante.

Comme nous l'avons indiqué, nous allons passer en revue l'impôt général sur le revenu, puis celui sur le capital, et enfin celui sur les successions.

1° *L'impôt général sur le revenu.*

§ 6. Il n'est pas nécessaire ici de démontrer longuement que la formule de l'effet proportionnel s'applique convenablement, nous en avons donné des exemples au cha-

qu'on fait certaines déductions des revenus des sociétés évalués séparément. Pour Kiaer, ceci diminue l'inégalité, les gros revenus consistant surtout en dividendes.

1. Voyez en droit fiscal français, les distinctions subtiles entre contribuable et imposable.

2. La Société des nations s'en est souvent préoccupé : Rapport en février 1925, Avis de la chambre de commerce internationale, 1924; Rapport, 1923, Comité financier de novembre, 1928, etc...

pitre V de la première partie (Revenus anglais de la cédule D et super-tax). En voici d'autres : dans un article du *Bulletin de la S. G. F.*, M. Dugé de Bernonville cite une statistique très complète de l'impôt sur le revenu en Prusse (1911). Le tableau donne le nombre des revenus imposés (colonne 2) correspondant à des tranches (colonne 1) variant de 0 à 2 millions de marks. La colonne 3 donne les chiffres calculés; 4 et 5 représentent les nombres rapportés à 10.000.

Nous avons utilisé le nombre des revenus non imposés (inférieurs à 900 marks) évalué à 8.251.707, chiffre officiel qui n'est sans doute qu'une approximation très grossière¹.

Les fluctuations parfois bizarres des nombres recensés sont suivies, en général, avec une grande fidélité par la formule. Les limites des revenus sont les limites inférieures des tranches. Le calcul, au moyen des formules de l'annexe, donne, pour le revenu moyen des 3.176.201 contribuables dépassant 1.350 marks, 3.340. Or ces imposés se partagent un revenu de 10.635 millions, soit 3.350 par tête. La coïncidence est presque parfaite. La même formule permet de calculer les revenus par tranches. Ainsi, de 1.250 à 1.500, on trouve 1.428 au lieu de 1.425; de 30.500 à 50.000; 38.200 au lieu de 38.500; de 200.000 à 300.000, 225.000, au lieu de 232.000, etc.

§ 7. Donnons un dernier exemple en comparant à la formule la plus compliquée de Pareto $N = \frac{A}{(x+a)^\alpha} e^{-px}$

N désignant le nombre des contribuables dont le revenu

1. L'article de M. Dugé de Bernonville date de juillet 1913, p. 433. La formule utilisée est $z = 0,737 \log (x - 1.100) - 1,224$.

Tableau XV. — Prusse 1911. Revenus (Personnes physiques).

Limite des Revenus (marks) (1)	Nombre des imposés recensés (2)	Nombre des imposés ^s (calculés) (3)	Pour 10 000 (recensés) (4)	Pour 10 000 (calculés) (5)
zéro	11.627.211	11.522.097	7.854,4	7.783,4
1.350	720.015	863.483	487	583,3
1.500	470.414	475.996	318,5	328,3
1.650	387.905	321.974	262,5	217,5
1.800	346.566	402.393	234,2	272,5
2.100	247.047	246.329	167,2	166,4
2.400	152.791	160.765	103,5	108,6
2.700	105.865	120.352	71,3	81,3
3.000	166.528	85.119	113	57,5
3.300	76.113	73.573	51,5	49,7
3.600	61.155	55.513	41,3	37,5
3.900	55.008	47.371	37,2	32
4.200	46.549	36.120	31,5	24,4
4.500	50.182	52.701	34,0	35,6
5.000	37.314	39.971	25,2	27
5.500	29.072	33.305	19,6	23,5
6.000	21.515	25.166	14,6	17
6.500	20.761	22.205	14	15
7.000	17.437	20.280	11,8	13,7
7.500	15.172	15.100	10,25	10,20
8.000	12.660	13.462	8,55	9,1
8.500	10.227	12.148	6,90	8,2
9.000	8.611	11.242	5,82	7,6
9.500	15.548	17.690	10,50	11,95
10.500	11.849	13.924	8,0	9,40
11.500	9.846	11.770	6,65	7,95
12.500	7.842	9.473	5,3	6,4
13.500	6.808	7.698	4,6	5,2
14.500	5.782	6.291	3,9	4,25
15.500	4.878	5.145	3,3	4,15
16.500	20.794	25.311	14,1	17,1
23.500	10.379	11.843	7,0	8,0
30.500	11.890	15.101	8,05	10,2
50.000	4.549	3.893	3,07	2,63
70.000	2.991	2.798	2,02	1,89
100.000	1.972	1.924	1,33	1,30
150.000	801	658	0,542	0,512
200.000	674	642	0,456	0,434
300.000	252	196	0,170	0,132
400.000	144	100	0,097	0,068
500.000	79	61	0,053	0,041
600.000	64	42	0,043	0,028
700.000	31	22	0,021	0,0151
800.000	27	17	0,018	0,0113
900.000	13	10	0,009	0,005
1.000.000	31	20	0,021	0,014
1.500.000	19	17	0,013	0,010
2.000.000	31	10	0,021	0,007
TOTAL	14.803.421	14.803.421	10.000	10.000

est au moins égal à x . Le tableau donne les valeurs de N pour certaines valeurs de x , observées, calculées par la formule de Pareto et par la nôtre (appelée formule A), pour une répartition des revenus dans le grand duché d'Oldenbourg en 1890.

Tableau XVI. — Revenus (Oldenbourg) 1890.

x marks	N observé	N Pareto	N form. B
300	54.309	54.309	54.309
600	24.043	27.340	24.221
900	16.660	17.000	16.564
1.500	9.631	8.728	9.287
3.000	3.502	3.168	3.484
6.000	994	999	1.040
9.000	445	465	456
15.300	140	153	138
30.000	25	22,7	24,2

Pareto a 8 % d'erreur en moyenne avec quatre paramètres, B avec trois 2 %¹.

§ 8. Pareto écrivait en 1897² : « On a dit qu'il devait y avoir une formule du genre $e^{-\alpha x^2}$ qui représentait mieux les faits. Cela est fort possible, mais il y a une seule manière de le prouver, c'est d'indiquer quelle est la formule et c'est précisément la chose qu'on se garde bien de faire. »

Nous espérons que la loi de l'effet proportionnel donne la réponse. La légitimité de l'application de la loi étant admise, nous pourrions nous servir de l'indice d'inégalité qu'elle permet de définir.

Nous allons étudier quelques pays où l'abondance des

1. La formule est $z = 1,258 \log (x - 120) + 0,497$.

2. Pareto, *Journal de la Société de statistique de Paris*, 1897, p. 367.

documents permet de suivre l'inégalité des revenus dans le temps, puis nous essaierons d'étudier ses variations dans l'espace.

a) *L'inégalité des revenus en France.*

§ 9. Après deux cent projets proposés depuis 1871, la loi du 15 juillet 1914 a établi en France un impôt général sur le revenu perçu d'après le montant total du revenu annuel, c'est-à-dire l'excédent du produit brut effectivement réalisé sur les dépenses effectuées en vue de l'acquisition et de la conservation du revenu. Le minimum varie constamment, 5.000 en 1915, 3.000 en 1916, puis 6.000, 7.000, puis 10.000 depuis le 30 décembre 1928. Nous avons pris pour x_0 , précisément 10.000.

Le tableau XVII pour la période d'après-guerre, permet de suivre l'évolution de la répartition des revenus au

Tableau XVII. — L'impôt sur le revenu en France. Nombre pour 10.000 dans chaque catégorie ;

N. nombre des revenus imposés y compris ceux taxés d'office; p. Revenu moyen imposé;
C. Indice d'inégalité.

Revenus de	Minimum à 30 000	30 000 à 50 000	50 000 à 200 000	200 000 à 500 000	500 000 à l'infini	N	p	C
1919	8.183	973	805	90,4	18,3	541.202	26.700	96
1920	8.633	732	563	59,9	11,9	977.344	22.400	102
1921	8.802	653	488	47,6	9,3	1.119.330	20.400	102
1922	8.454	845	626	62,6	12,6	1.026.656	23.850	100
1923	8.342	902	669	73,0	14,4	1.201.285	24.400	100
1924	8.351	906	668	64,7	10,2	1.487.828	23.950	94
1925	8.492	853	591	54,0	9,8	1.938.597	23.100	97
1926	8.608	777	547	56,3	11,9	2.486.700	22.900	103
1927	8.665	789	487	48,2	11,2	2.813.090	22.350	102

triple point de vue de l'inégalité, du nomb total des imposés et du revenu moyen. Depuis 1919, N augmente

avec une régularité remarquable, croissant d'environ 1/4 chaque année. Le revenu moyen bouge peu, oscillant autour de 23.500 fr. minimum en 1921, maximum vers 1924. L'étude de l'inégalité semble montrer une *ondulation cyclique* de période voisine de 6 années, maximum 1920-26, minimum 1922 ou 1923. Il est impossible de ne pas songer à rapprocher ce mouvement de celui des affaires. L'indice des prix de gros était maximum en 1920, minimum en 1922, maximum en 1926. Il paraît donc exister un lien entre l'inégalité des revenus et les cycles économiques. Voici ce qu'écrivait à ce propos. M. Lescure dans son ouvrage sur *les Crises* (éd. 1923, p. 292) « La crise a pour effet ni de diminuer le nombre des contribuables, ni de réduire le montant total des revenus imposables, mais elle a cependant pour effet de réduire le rendement total de l'impôt. Ces trois termes, augmentation du nombre des contribuables, diminution du rendement, augmentation du revenu imposable, signifient *déclassement* des contribuables, diminution du nombre des contribuables à gros revenus frappés par les tarifs les plus élevés de l'échelle progressive, augmentation du nombre des contribuables à revenu moyens frappés d'un tarif plus modéré. La crise procède à un remaniement brusque de la répartition des richesses et des revenus; elle rejette dans la classe moyenne ceux qu'une activité particulièrement rémunératrice ou des spéculations heureuses avaient, pendant l'essor, élevés au rang de capitalistes. »

Le raisonnement de M. Lescure ne peut donner, en toute rigueur, une indication sur la variation de l'inégalité des revenus, car les trois termes dont il parle peuvent aussi signifier, diminution du revenu moyen de l'individu, si le revenu imposable augmente moins rapidement que le

nombre des contribuables, ce qui explique la diminution du rendement sans nécessiter à un remaniement de la répartition. En d'autres termes la crise correspondrait à un appauvrissement des individus¹. Cependant la pensée de M. Lescure paraît pouvoir se traduire en faveur d'une diminution de l'inégalité après les crises. C'est ce que les chiffres semblent montrer. Il ne faut cependant pas se montrer trop affirmatif, car la précision de notre indice n'est pas illimitée et ses variations pourraient être accidentelles. Il reste donc à vérifier l'existence de ce mouvement cyclique dans d'autres cas, ce que nous essayerons de faire.

§ 10. Les statistiques fiscales nous permettent d'étudier l'influence de la situation de famille sur l'inégalité des revenus. Les célibataires et les ménages sans enfants supportent en effet des majorations d'impôt de 25 % et de 10 % et sont par suite recensés à part. Le tableau XVIII donne les résultats.

Tableau XVIII. — Situation de famille.

N. Pourcentage du nombre des individus de la catégorie au total des contribuables.

Catégories	Revenus de	N	p	C
Célibataires	1926	16,4	14.450	111
	1925	18,5	13.900	109
Ménages sans enfants	1926	11,9	22.100	98
	1925	11,9	22.150	93
Ensemble des imposés ..	1926	100	22.900	103
	1925	100	23.100	97

1. L'augmentation du nombre total de contribuables s'explique souvent par une recherche plus stricte de la matière fiscale. Elle ne contredit pas ce qui précède.

Les célibataires ont un revenu moyen nettement plus faible et une inégalité légèrement supérieure. Les ménages sans enfants se rapprochent de l'ensemble des contribuables pour le revenu moyen, mais l'inégalité est plus faible. Nous avons trop peu de données pour ne pas nous borner à ces brèves indications.

§ 11. Il est curieux de rapprocher les résultats précédents des évaluations pour l'application de l'impôt sur le revenu faites avant le guerre. Ainsi le projet déposé par M. Caillaux, ministre des finances en 1906, évaluait ainsi les revenus des Français :

2.500 et au-dessous	9.509.800
2.500 et 3.000	563.000
3.000 et 5.000	446.000
5.000 et 10.000	294.000
10.000 et 20.000	123.000
20.000 et 50.000	51.000
50.000 et 100.000	9.800
100.000 et plus	3.400

Ce qui donnait 11 millions de contribuables pour un revenu de 22 milliards et demi. Ces chiffres semblent très rapprochés de la réalité, car ils donnent un indice d'inégalité de 108 et ils suivent bien la loi de l'effet proportionnel¹.

Leurs contemporains ne leur accordaient cependant pas une grande confiance. Ainsi M. F. Faure admettait que les éléments dont on disposait à ce moment pour évaluer le revenu total des Français étaient très insuffisants et, pour mesurer leur répartition, nuls.

1. Ces chiffres sont tirés d'une communication de M. Faure au rapporteur de l'Institut international, (Kiaer) *B. I. I. S.*, XIX, 2, 103.

§ 12. En résumé, nous constatons que l'indice d'inégalité varie très peu (quelques pour cent) pendant une période troublée; ceci est une preuve de plus qu'il mesure une réalité¹. Nous avons cru constater un lien entre l'inégalité et les cycles économiques, nous essaierons de le vérifier dans la suite.

b) *Etats allemands et Autriche.*

§ 13. Ils ont fait l'objet de nombreuses études; les économistes et statisticiens allemands ont toujours été préoccupés de la question qui nous occupe. De plus les statistiques, surtout autrefois, étaient nombreuses et très développées. Les ouvrages de A. Soetbeer, *Umfang und Verteilung des volkseinkommen im Preussischen Staate* (1872-78), et ses nombreux articles dans le *Jahrbücher für National Oekonomie und Statistik*, ceux de Karl Bucher sur Bâle, d'Adolph Wagner sur la Saxe², de Nitschke sur l'Autriche... en fournissent abondamment la preuve. Mais, comme nous l'avons vu, ils ne disposent, pour étudier l'inégalité, que de méthodes rudimentaires. Voici les valeurs de l'indice pour différentes années.

Pour comparer utilement ces chiffres, il est nécessaire de donner quelques éclaircissements sur la technique des impôts.

En principe, avant 1913, en Allemagne, l'impôt direct est réservé aux Etats particuliers et l'impôt indirect à l'Empire. Un système assez simple de virements, faisait

1. Il ne faut pas s'attendre à ce que l'inégalité des revenus soit très instable. Les grands mouvements monétaires agissent, en gros, proportionnellement.

2. Nombreux articles dans les *Conrad Jahrbücher*, 1907. Citons encore Würzburger pour la Saxe.

**Tableau XIX. — Répartition des revenus en
Allemagne et Autriche**

N Nombre total des imposés; p, revenu moyen du contribuable;
C indice d'inégalité de la répartition.

Année		N	p	C
<i>Prusse</i>	1852	43.513		128
	1876	5.155.324	928	137
	1881	5.224.654		133
	1886	5.557.107		135
	1892	2.435.858	2.340	148
	1893	2.479.778		132
	1894	2.519.008		136
	1901	3.146.527	2.290	144
	1911	6.551.705	2.190	136
<i>Saxe</i>	1878	1.007.520	862	102
	1880			98
	1886			100
	1888	1.322.650	960	98
	1898	1.660.071	1.155	100
	1904	994.573		104
	1910	2.105.241	1.375	98
<i>Autriche</i>	1898 B	729.243	3.065	126
	1899 B	752.589		133
	1903 B	914.872	3.100	127
	1903 A	895.515	3.100	129
	1910 A	1.304.755	3.360	129

communiquer les budgets (Clause Frankenstein). Ceci nous explique les règles différentes de la Prusse et de la Saxe. Ainsi le minimum imposable est, en Prusse, de 420 Mks avant 1891 et 900 après; en Saxe, de 300 Mks avant 1894, 400 après. (On peut constater l'influence de ces changements sur le nombre N des imposés.) En Saxe, l'impôt frappait les personnes individuelles, quels que soient leur âge, sexe ou profession. En Prusse, au moins depuis la réorganisation du chancelier Miquel, en 1900, on ajoute au revenu du chef de famille, ceux des autres membres. On peut admettre que le dénombrement en Saxe de revenus qui ne sont que des revenus d'appoint, exagère

l'inégalité des conditions. La statistique de 1904 avait été établie par ménages, pour obvier à cet inconvénient; malheureusement incomplète, elle ne permet pas de constater une diminution de l'inégalité. Il semble donc que l'inégalité soit en Saxe, plus faible que ne le montre l'indice et que, par suite, elle diffère notablement de celle de la Prusse. Les chiffres, en effet, conduisent à admettre environ 100 pour indice de la Saxe et 135 pour la Prusse.

L'inégalité en Saxe paraît voisine de celle de la France.

En Autriche, depuis 1903 (A) les imposables sont classés d'après leur revenu réel; auparavant (B) une commission de répartition déterminait leur catégorie de taxation. L'indice oscille autour de 120, voisin de la Prusse.

On peut, sous les réserves précédentes, présenter quelques remarques générales :

1^o Pour un pays donné, l'indice reste remarquablement constant, il paraît impossible de démêler une tendance même faible à une variation dans le temps¹. Pareto avait cru apercevoir une légère baisse de l'inégalité en Prusse, de 1852 à 1894. Leroy-Beaulieu y croyait aussi (il parle de certitude approximative²). La méthode des quartals, avait montré à Würzburger une diminution de l'inégalité en Saxe, de 1888 à 1906³. Il semble bien qu'il n'en soit rien. Les variations de l'ordre de 4 ou 5 % doivent, sans doute, être attribuées, soit à des circonstances fortuites,

1. Surtout étant donné la précision du calcul de l'indice.

2. Pareto, *Cours d'Economie politique*, t. 2, n° 957. Leroy-Beaulieu, *Essai sur la répartition des richesses* : « Ce qui, dans mon esprit était une conviction lentement formée, j'ai tâché d'en avoir la démonstration positive par des chiffres. Les chiffres sont le seul argument que notre siècle *déjant et sceptique* considère comme probant. » Il n'utilise même pas la méthode du groupement personnel.

3. *Zeitschrift des Königlichen Statistischen Bureaus*, 1904, 11. Il est discuté par Kiaer (*B. I. I. S.*, XX 2, 619, 1914).

soit à l'ondulation cyclique du mouvement des affaires que l'on ne peut étudier ici. ■ 1

2° Dans les trois pays, le nombre des contribuables va en croissant, souvent même très rapidement, sous réserve des changements de législation bien entendu. Le revenu moyen croît aussi¹, ce qui montre que la masse à partager croît plus vite que le nombre des parts.

c) Japon.

§ 14. Nous consacrons quelques lignes à ce pays, parce que, d'une part, son développement économique est récent et que, par suite, la vérification de la loi de l'effet proportionnel y a une valeur particulière, parce que, d'autre part, M. Iwasaburo Takano a étudié la répartition des revenus dans son pays dans un long article qu'il est intéressant d'analyser².

Les deux tableaux montrent la vérification de la loi et son application à diverses années.

L'impôt sur le revenu est appliqué depuis 1887, son histoire comprend deux périodes : 1° jusqu'en 1898, les revenus des membres de la famille devaient être ajoutés à celui du chef de la famille avec lequel ils vivaient et toute personne morale était exemptée; 2° après 1898, la

1. Il est facile de voir que les changements de minimum imposable ne peuvent expliquer entièrement l'augmentation du revenu moyen imposable. Celui-ci est exprimé en Mks pour la Prusse et la Saxe, en couronnes pour l'Autriche.

2. Etude sur le développement et la répartition du revenu national au Japon, basé sur les statistiques de l'impôt sur le revenu. (*B. I. I. S.*, XVIII, I, 410, 1909). Les chiffres du revenu moyen, tirés de cet article, nous semblent inexacts; en effet, pour 1904, en attribuant à chaque revenu d'une tranche la valeur de la limite inférieure, on trouve 602. Le calcul, à partir de la formule, donne 785, certainement plus exact. Nous avons aussi utilisé des renseignements fournis par M. Ariyasa Chogo (*B. I. I. S.*, XIX, 2, 188

Tableau XX. — Japon 1904 :
donnant le nombre des revenus au moins
égaux à x

x yens	Nombre de revenus	
	observé	calculé
300	700.576	700.576
500	309.695	309.650
1.000	109.522	109.080
2.000	38.376	38.251
3.000	19.920	19.996
5.000	8.095	8.141
10.000	2.155	2.151
15.000	932	920
20.000	519	476

formule : $z = 1,060 \log (x - 420) - 2,286$

erreur moyenne : 0,4 %

*Tableau XXI. — Répartition du revenu au
Japon*

Année	N	p	C
1890	115.833	720	138
1898	195.292	680	126
1899	342.721	595	91
1902	580.849	563	91,5
1903	648.976	566	93
1904	700.576	563	94
1905	755.338	562	94,5
1906	827.516	563	94,5
1907	917.079	566	94,5
1908	1.124.594	570	94,5

N nombre total d'imposés — p revenu moyen en yens

C indice d'inégalité

loi crée trois classes, celle des personnes morales, celle des intérêts des dettes et des dividendes, enfin celle des individus.

Voici l'analyse de la période 1887-98, faite par M. Takano¹ : Le nombre des personnes imposées et le total des revenus croît progressivement, ce qui est dû à une recherche de la matière imposable plus précise et au progrès économique. « Mais dans quel sens, ont évolué les différentes catégories de revenus pendant la période considérée ? L'inégalité n'est-elle pas devenue plus grande ? Nous pourrions avoir cette idée pessimiste que le pauvre devient plus pauvre et que le riche voit sa fortune se développer, en considérant que la catégorie inférieure qui comprenait 88,35 % des imposés, en 1890 descendait à 82,98 % en 1898, tandis que la catégorie moyenne passait de 11,36 % à 16,58 % et la catégorie supérieure de 0,29 % à 0,44 % durant la même période. (M. Takano divise les contribuables en trois catégories, de 500 yens à 1.000, de 1000 à 10 000, et au-dessus de 10 000.) Une telle conclusion sera rejetée lors d'une inspection plus minutieuse des nombres; en les considérant, nous comprenons que la catégorie inférieure s'est en réalité accrue, quant au nombre des personnes la composant, lequel de 102.342 atteint 162.050, soit un grand taux d'accroissement. Cette augmentation, cependant, n'apparaît pas lorsqu'on établit la proportion par rapport à l'ensemble, car elle est masquée par les taux d'accroissement plus importants des deux autres catégories. Ce n'est pas une diminution dans la catégorie inférieure, mais une augmentation dans les deux autres. Non seulement la catégorie inférieure conserve la

1. Nous nous excusons de la citer longuement, mais elle nous semble très caractéristique des inconvénients de la méthode des pourcentages.

même position, mais elle a avancé à quelques points de vue quoiqu'elle figure derrière les deux autres au point de vue du taux d'accroissement... »

Et voici la conclusion : « D'après ces chiffres, la répartition des revenus s'est faite d'inégale façon et il semble vraisemblable que la tendance générale à l'accroissement a été favorable aux classes jouissant d'un revenu comparativement élevé, mais aussi à d'autres égards à celles en possédant un, relativement faible ».

§ 15. N'est-il pas infiniment plus simple, une fois la légitimité de la loi de l'effet proportionnel admise, de comparer les indices d'inégalité et de constater que de 1890 à 1898 il a baissé de 138 à 126 et que, par suite, l'inégalité, a diminué ?

Comme le constatait d'ailleurs M. Takano, on voit, en 1899, une augmentation soudaine du nombre des personnes taxées et de leurs revenus, ceci sans qu'il « y ait eu aucune circonstance capable de produire des changements aussi inattendus ». L'inégalité diminue brusquement et il serait du plus haut intérêt de connaître le phénomène perturbateur. Le changement de législation est insuffisant, le taux de l'impôt a varié (le maximum du taux est passé de 3 % à 5,5 %). L'activité du fisc ne semble pas à M. Takano une raison suffisante. Faut-il admettre l'influence de l'agitation politique intense de cette époque¹ ? Nous n'en savons rien.

Quoiqu'il en soit, de 1899 à 1908, l'inégalité des répartitions varie fort peu et l'ondulation cyclique ne se des-

1. Après la guerre contre la Chine (1894) et l'occupation de Formose (1895-97), le vicomte Ito, puis le ministre Okuma font triompher une politique de développement économique qui nécessite un aggravement d'impôts (loi de 1898).

sine pas. Ce pays semble s'être stabilisé socialement dès son entrée dans le concert des grandes puissances (1902, traité d'alliance avec l'Angleterre; 1903-06, guerre avec la Russie).

d) *L'inégalité des revenus à travers le monde.*

§ 15. Le tableau XXII récapitule les résultats précédents. Nous y avons joint de plus un certain nombre d'indices correspondant à des répartitions citées par les principaux auteurs qui se sont occupés de cette question. Voici quelques renseignements sur leurs sources et leurs particularités.

Les répartitions de Bâle, Neuchâtel, canton de Vaud, sont citées par Pareto et par Leroy-Beaulieu. Il s'agit d'un impôt proportionnel de taux très faible (1 à 2 %), aussi est-il probable que les fraudes sont réduites au minimum.

Celle des villes italiennes a été formée en ajoutant les revenus de la « taxe de famille » d'un grand nombre de villes. (Calcul dû à Benini.)

Nous avons trouvé les répartitions des pays scandinaves dans le *Bulletin de la S. G. F.* (tome 2, p. 436). On peut se demander si on doit relier la forte diminution de l'inégalité, au Danemark, de 1870 à 1903, aux luttes politiques très fortes qui ont commencé après la guerre de 1864 et ont duré jusqu'en 1894. Cela semble peu probable, puisque les répartitions de la Norvège conservent une inégalité constante, malgré la séparation avec la Suède en 1905.

Les chiffres de la Grande-Bretagne sont extraits, soit de Pareto, soit de Leroy-Beaulieu. Il s'agit de la cédule D, or elle comprend en dehors des revenus individuels qui

Tableau X XII. — Indices d'inégalité de diverses répartitions d'après les statistiques d'impôts sur le revenu

EUROPE		EUROPE	
<i>France</i>	1919 1920 1921 1922 1923 1924 1925 1926 1927	96 102 102 100 100 94 97 103 102	<i>Vaud (canton)</i> <i>Villes italiennes</i> <i>Florence</i> <i>Danemark</i> <i>Norvège</i> <i>Angleterre</i> <i>Irlande</i>
<i>Prusse</i>	1852 1876 1881 1886 1892 1893 1894 1901 1911	128 137 133 135 148 132 136 144 136	1892 1890 1890 1870 1903 1908 1895 1900 1903 1843 1876 1879 1893 1893
<i>Saxe</i>	1878 1880 1886 1888 1898 1904 1910	102 98 100 98 100 104 98	<i>Pérou</i> <i>Japon</i>
<i>Oldenburg</i> <i>Autriche</i>	1890 1898 B 1899 B 1903 B 1903 A 1910 A	80 126 133 127 125 129	<i>Amérique</i> <i>fin XVIII^e</i> <i>Asie</i> 1890 1898 1899 1903 1904 1905 1906 1907 1908
<i>Bale</i> <i>Neufchâtel</i>	1887 1874	128 90	<i>Océanie</i> <i>Nouvelles-Galles du Sud</i> 1908 1909 1910 1911

forment environ la moitié, ceux des sociétés anonymes. Les résultats en sont faussés.

La répartition, au Pérou, n'est pas celle d'un impôt, Pareto, citant l'histoire d'Amérique de W. Robertson, indique qu'on vendait au Pérou, sous la domination espagnole à la fin du XVIII^e siècle, une bulle dite « de la Croisade » et que tout habitant, espagnol, créole ou métis s'empressait d'acheter, au prix fixé par le gouvernement, cette bulle qu'il croyait essentielle à son salut. Son prix variait suivant les personnes. On a ainsi la répartition des prix.

Nous devons les renseignements sur la Nouvelle-Galles du Sud à M. Smith (*B. I. I. S.* XX, 2, 892). Signalons que, dans ce pays, la taxe n'est perçue que sur les revenus des personnes au-dessus de 1000 £. Il s'agit d'une sorte de super-taxe.

Complétons ces renseignements en rappelant le Rapport très documenté de Kiaer dans le *B. I. I. S.* tome XIX, 2, p. 103, complété dans le tome XX, 2, 103. Il fournit pour une quarantaine d'Etats une liste très complète des documents statistiques connus à ce moment sur la répartition des fortunes et des revenus, et serait indispensable à qui voudrait tenter une étude détaillée de cette question.

Nous ne conclurons pas, afin de passer à l'étude de la répartition des fortunes et des successions, étude étroitement liée à la précédente.

2^o *L'impôt sur le capital.*

§ 16. La loi de l'effet proportionnel s'applique aussi bien aux fortunes qu'aux revenus. Le tableau suivant en donne la preuve, et cela d'une manière très frappante

puisqu'il utilise une statistique datant de 1454, à peu près l'époque du traité d'amitié perpétuelle entre la France et les Suisses (1453). Le calcul des fortunes supérieures à une limite donnée est bon; l'erreur moyenne est de 3 %¹.

Tableau XXIII. — Fortunes (Bâle). Nombre des fortunes imposés supérieures à x

en 1454			en 1887		
x florins	Observé	Calculé	x milliers de francs	Observé	Calculé
10	1.403	1.403	20	2.631	2.631
50	788	788	40	1.819	1.785
100	560	586	100	998	1.015
150	502	479	500	250	248
300	309	324	1.000	111	112
1.000	144	143			
3.000	48	52			
5.000	28	29			

Donc, malgré les bouleversements extraordinaires survenus depuis la fin du moyen âge, le mécanisme qui donne naissance à la loi subsiste et mieux encore l'inégalité des fortunes reste du même ordre de grandeur (indices 137 et 108).

§ 17 L'intérêt immense qui s'attache à ces considérations, nous force à utiliser toutes les possibilités statistiques. G. Schmoller, l'économiste célèbre, a réuni dans un mémoire du *B. I. I. S.* les données de ce problème². « Nous

1. Pour ces huit intervalles, le test de Pearson donne $X^2 = 3,2$ et $P = 0,86$, il y aurait donc 86 chances pour cent en faveur de la formule. Pareto avait dû renoncer à appliquer sa formule d'un bout à l'autre de la distribution et considérer qu'il ne fallait pas utiliser les chiffres des petites fortunes. Il débutait à 100 fl. et malgré trois paramètres obtenait sur le chiffre de 300 florins une erreur de 14 %.

2. Die Einkommensverteilung in alter und neuer zeit (*B. I. I. S.*, IX, 1).

possédons des preuves statistiques misérables pour les temps éloignés. Mais quoiqu'elles n'aient été utilisées jusqu'ici en aucune façon, cela vaut en tout cas la peine de les examiner une fois d'une manière précise et en connexion avec les résultats statistiques actuels » (p. 9). Nous allons reprendre l'étude de Schmoller, en utilisant l'indice d'inégalité pour comparer les distributions.

§ 18. *Bâle*. — Schonberg, dans son livre sur la finance à Bâle¹, au xiv^e et au xv^e siècle, donne cinq listes d'impôts fournissant, toutes, un tableau de la répartition des richesses. Schmoller a groupé les nombres de façon à lui faciliter les comparaisons. Deux listes sont incomplètes, car elles ne comprennent pas toutes les parties de la ville (1446 et 1451).

Voici le nombre des imposés dont la fortune est comprise entre les limites indiquées.

Tableau XXIV. — Répartition de la Richesse à Bâle (Moyen âge)
Nombre d'imposés entre certaines limites de revenu (en Goldguld)

Limites en :	1429	Limites en :	1446	1451	1453	1476
0 à 10	649	0 à 30	1.428	557	1.068	1.005
10 à 150	1.117	30 à 200	767	408	584	690
150 à 2.000	644	200 à 2.000	472	221	357	470
2.000 et plus	126	2.000 et plus	84	26	90	92
TOTAL. . .	2.536		2.751	1.219	2.099	2.257

Voici quelques renseignements sur la situation économique de la ville à cette époque. Bâle avait, d'après Schonberg, 10.400 habitants en 1429, 12.000 en 1446, 8.100 en 1451 et 9000 en 1475. Ces fluctuations s'expli-

1. *Finanzverhältnisse der Stadt Basel im 14 und 15 Jahrhundert.*

quent surtout par l'essor dû au concile de 1430-38; par la peste de 1449, les embarras politiques et l'éloignement des nobles pendant les dernières années.

Il s'agit d'une ville florissante avec un patriciat influent, un corps de métiers puissant. La noblesse a à peu près disparu dès 1450, mais une industrie commence à naître.

Que peut-on tirer des chiffres du tableau? Voici ce qu'écrit Schmoller : « Les quatre classes construites peuvent être considérées comme celles des pauvres, des classes moyennes inférieures et supérieures et des riches... » Suit une discussion au moyen de la comparaison des pourcentages. « Comme résultat vraisemblable, on pourra dire qu'aujourd'hui (1887) la classe moyenne supérieure est forte comme autrefois, la classe moyenne inférieure, un peu plus faible et celle des pauvres beaucoup plus nombreuse. Le nombre des riches est à Bâle en 1454 et en 1887, identique en pour cent... De sorte qu'on trouve de 1400 à 1890, une différenciation toujours croissante des revenus si la classe moyenne disparaît et si les pauvres deviennent toujours plus pauvres et les riches toujours plus riches ». Schmoller n'est d'ailleurs pas très convaincu de la vérité de ces assertions, car il écrit presque aussitôt : « Ces comparaisons ont, dans l'observation, un appui trop faible¹. »

Calculons de la manière habituelle notre indice d'inégalité, nous trouvons 140 en 1429, puis 135, 119, 153, 131 pour les répartitions suivantes. Le départ des races riches, nobles ou gros bourgeois, vers 1450, amène une diminution de l'inégalité. La prospérité du commerce et de l'industrie engendre sa croissance. La comparaison avec les temps modernes, est immédiate, l'indice est en 1887 égal à 108.

i. On peut aussi lire Sergeew (*Die Verteilung des Güter der Schweiz.*)

Nous pouvons donc conclure, sous réserve de la valeur des chiffres recueillis par Schonberg que l'inégalité a diminué au cours des siècles. Quelle est la valeur de ces chiffres ? Nous l'ignorons.

§ 19. **Frankfort.** — Une répartition pour l'année 1420 est donnée par Bücher. Elle conduit à un indice égal à 106.

§ 20. **Augsbourg.** — Alors que Bâle et Frankfort étaient deux villes de moyenne grandeur (8 à 10.000 habitants) où le commerce et l'industrie ne présentaient rien d'exceptionnel, Augsbourg apparaît comme près de cinq fois plus étendue. C'est le point central pour le commerce de l'argent, l'exportation des produits industriels, les entreprises minières, etc... C'est dire l'intérêt qui s'attacherait à la connaissance de sa répartition des richesses. Schmoller et Pareto présentent des statistiques, mais on ne peut les utiliser, car tous les deux ont transformé les tableaux originaux¹ pour en déduire une répartition des revenus. Schmoller, là encore n'a pas grande confiance dans ses résultats. Il critique même sa méthode d'étude². N'ayant pas les données initiales il nous semble inutile de calculer l'indice.

§ 21. **Angleterre.** — Nous citerons enfin le tableau des

1. Ils se trouveraient dans Hartung (articles du *Jahrbuch für Gesetzgebung*, 1895).

2. « Wie wenig es sich bei diesen erscheinungen im stabile resultat handle » Et voici sa critique de la méthode de comparaison des pourcentages : « Quand il allègue que de 1498 à 1554 le total s'est accru de 54 % les non-possédants de 88 %, la moyenne inférieure de 17 %, la supérieure de 163 % et les riches de 313 %, alors il éveille l'idée *comme tous les calculs analogues de variation*, que chaque classe s'est développée suivant un mouvement différent pendant qu'il s'agit essentiellement de savoir combien d'individus de chaque classe sont passés dans la catégorie supérieure. »

professions de Gregory King¹. En utilisant l'ensemble des 25 groupes sociaux qu'il considère, Schmoller arrive à la répartition suivante pour l'Angleterre, en 1688. King comptait sur cinq millions et demi d'habitants 1.360.000 familles qu'il répartissait ainsi :

de 6 à 20 £.....	62.4 %
de 40 à 80 £.....	34.1
de 100 à 400 £.....	2.9
de 400 à 1.000.....	0.44
au-dessus de 1.000	0.014

Evidemment ce tableau est fort curieux, puisqu'il semble montrer qu'il n'y a aucune famille se plaçant entre 20 et 20 £ ou entre 80 et 100. Cela tient à ce qu'il ne propose aucune échelle de revenus et que, par suite, des lacunes ont pu se produire dans la sommation des revenus moyens des groupes professionnels. Sous ces réserves, l'indice paraît être voisin de 103. (Il faut remarquer que l'Angleterre de cette époque n'est pas celle d'aujourd'hui; c'était encore en 1688 essentiellement un pays agricole).

En résumé, il ne semble pas que l'on assiste depuis le moyen âge à une croissance ininterrompue de l'inégalité. Il est plus vraisemblable qu'il y a eu des mouvements de sens contraire provoquant des oscillations dont il est impossible de fixer l'amplitude ou la période. Nous y reviendrons.

§ 22. Les statistiques modernes. — M. Methorst a donné dans le *B. I. I. S.* (XX, 2, 863) une série importante de

1. Tableau reproduit dans l'ouvrage de Davenant, *Essay of the probable methods of making the people gainers in the balance of trade*, 1699. On sait que G. King a donné une loi célèbre sur les rapports entre les fluctuations des récoltes et celles de la valeur pour le blé.

chiffres concernant l'impôt sur le capital aux Pays-Bas.

Il faut remarquer que la matière imposable ne comprend pas les capitaux au-dessous de 13.000 florins dans certaines conditions¹, ni un cinquième du capital en usufruit, ni les meubles, vêtements, objets d'art, ni une partie de la valeur marchande des immeubles, etc... Toutes ces atteintes à la définition économique du capital sont sans grande importance relative puisqu'elles interviennent chaque année d'une façon constante.

On trouvera plus loin, dans le paragraphe 30 des successions, un tableau donnant pour toutes les années de 1893 à 1910 le nombre N des personnes imposées, le capital moyen imposé p ; et l'indice C d'inégalité. Nous avons joint à ces données habituelles le chiffre de la population du royaume aux mêmes époques. On y verra que le nombre des imposés augmente lentement, mais constamment, en même temps que la population, mais moins rapidement². (Le pourcentage des imposés passe de 16,4 à 16,2.) Le capital moyen augmente lentement, les oscillations masquent en partie le mouvement. Quant à l'indice d'inégalité, il est d'une stabilité étonnante, puisqu'il reste compris entre 99,7 et 102,9. Il est bien difficile de démêler dans ses variations l'influence du mouvement cyclique. Ceci, si on se rappelle les résultats obtenus pour l'impôt général sur le revenu en France, semblerait montrer que les capitaux sont plus stables que les revenus et moins soumis au mouvement des affaires. On ne peut cependant

1. Pour les personnes physiques habitant dans le royaume et qui sont imposées uniquement au titre de l'impôt sur les revenus professionnels (en 1909, le total de ces capitaux atteint 285 millions de florins).

2. Il est difficile de comparer les deux mouvements, car seuls les individus d'un certain âge possèdent en général des capitaux. Nous retrouverons cette difficulté à propos des successions.

l'affirmer. Le calcul de l'indice pour les périodes 1893-98 et 1899-1908 montre une légère croissance de l'inégalité 100,6 et 101,2. Malheureusement il est peu probable que l'on puisse fixer la valeur de l'indice avec une telle précision¹.

§ 23. **L'Allemagne** aussi possède depuis longtemps, un impôt sur la fortune, connu en Prusse sous le nom d'impôt complémentaire « *Ergänzungsteuer*² ». Dès 1913, le Reich l'introduit par une contribution militaire extraordinaire renouvelée fréquemment pendant la guerre. Puis la constitution de Weimar réserve au Reich le droit exclusif d'asseoir et de percevoir des impôts sur le revenu et la fortune. Un impôt sur la fortune, institué par la loi du 8 avril 1922, ne fut pas perçu jusqu'en 1924, puis fut modifié en 1925 dans le sens d'un allègement des charges fiscales³. *Le Bulletin de statistique et de Législation comparée* du ministère des finances a donné récemment (septembre 1929, p. 523) la répartition des imposés pour 1924 et 1925.

Tableau XXV. — **Impôt sur la fortune** (Allemagne).
(Personnes physiques)

Année	1924	1925
Nombre d'imposés.....	2.553.441	2.485.045
Fortune moyenne Mk....	30.500	25.750
Indice d'inégalité.....	111	118

La comparaison des années 1924 et 1925, montre une diminution du nombre des imposés, du chiffre moyen et

1. Nous avons vu qu'une précision de 1 % était déjà rare.
2. Avant la guerre 13 Etats suivaient l'exemple de la Prusse.
3. L'impôt a encore été modifié en 1926 et 1929 (augmentation des droits).

par suite du total des capitaux. Il semble que l'on assiste à une diminution de la fortune allemande. Comme le fait remarquer le rédacteur du bulletin, cette baisse est surtout imputable à la réforme opérée dans l'assiette de l'impôt par la loi du 10 août 1925 relative aux procédés d'évaluations, surtout pour les propriétés agricoles et les fonds d'exploitation industrielle ou commerciale². Nous ne pouvons donc pas, comme il eut¹ été tentant, associer l'augmentation de l'inégalité à cette prétendue diminution de la fortune allemande; nous avons là un excellent exemple des difficultés des comparaisons statistiques.

§ 24. En France, il n'existe pas d'impôt sur la fortune. Il faut donc, se contenter pour obtenir des indications¹, de données statistiques que l'on peut rattacher de plus ou moins près à la répartition des richesses. Leur étude aura de plus l'intérêt de montrer combien est varié le champ d'application de la loi de l'effet proportionnel.

Ainsi *la répartition des rentes en cours de la caisse nationale des retraites pour la vieillesse*, rentes dont le capital forme l'unique fortune d'une partie des vieillards, suit très bien la loi comme le montrent les chiffres suivants.

1. Signalons aussi la tendance du contribuable à déduire leurs biens fonciers de la déclaration de leurs capitaux d'exploitation en vue de soustraire ces biens aux charges spéciales imposées à l'industrie.

2. Bien entendu, nous n'oublions pas les statistiques des successions. Nous les verrons plus tard. De plus, nous ne dissimulerons pas qu'il est assez difficile de relier les indications qui suivent, leur diversité fait une bonne partie de leur intérêt.

Tableau XXVI. — Rentes pour la vieillesse
(1927)

Importance des rentes	Nombre des rentiers pour 10.000	
	observe	calculé
0 à 1.200	9.681	9.691
1.200 à 1.500	91	81
1.500 à 2.400	113,6	113
2.400 à 3.000	33,7	34
3.000 à 4.000	29,5	30
4.000 à 5.000	15,9	15,5
au-dessus. . .	35,4	34,5

Formule : $z = 0,95 \log x - 1,604$.

Le tableau XXVIII montre l'évolution des caractéristiques habituelles de la répartition, de 1922 à 1927. Le nombre total des rentiers augmente régulièrement ainsi que la rente moyenne, l'indice oscille entre des limites assez larges, mais sa valeur rappelle celle de l'inégalité des revenus.

L'étude des *livrets de Caisse d'épargne*, privée ou nationale, conduit aux mêmes conclusions¹.

Enfin il est curieux de rapprocher la répartition des *comptes de chèques postaux*. Elle suit bien la loi comme le montre les tableaux XXVII et XXVIII. Mais l'inégalité est plus accentuée que pour les revenus, elle approche 150, c'est-à-dire, nous le verrons bientôt, l'inégalité du personnel des entreprises industrielles. Ceci s'explique en remarquant que les titulaires de ces comptes sont surtout des commerçants et des industriels. L'avoir net du compte est certainement en liaison stochastique étroite avec le personnel.

1. Signalons cependant que le graphique habituel forme deux droites de pentes différentes, il semble que ceci soit dû à la superposition de deux groupes de déposants, les petits épargnants et les sociétés de secours mutuel, syndicats, caisses agricoles, etc., qui ont des prérogatives spéciales.

Tableau XXVII. — Pourcentages des titulaires ayant un compte d'avoir net au moins égal à x (chèques postaux)

x		50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000	500 000
1921	observé. .	67,86	56,22	34,84	24,74	8,57	4,43	0,87	0,454	0,112
	calculé. .	70,80	58,95	34,30	23,30	8,70	4,62	1,02	0,420	0,054
1922	observé. .	68,84	57,18	36,14	25,34	8,99	4,51	0,94	0,506	0,113
	calculé. .	71,60	59,75	35,05	23,97	9,05	4,83	1,10	0,450	0,057

Tableau XXVIII

	N	MOYENNE	INDICE	ANNÉE
Comptes de chèques postaux	110 344	3 000	148	1921
	151 183	3 300	148	1922
	266 949	189	93,5	1922
	283 059	206	92	1923
Retraite pour la vieillesse (Caisse nationale).....	293 389	218	117	1924
	304 280	228	101	1925
	308 581	242	89	1926
	319 945	324	105	1927

En résumé, nous avons fort peu de documents sur la répartition des fortunes, c'est ce qui explique l'intérêt des statistiques successorales que nous allons maintenant aborder.

3° Les statistiques successorales.

§ 25. Elles présentent des particularités importantes. On a tenté parfois de faire une distinction entre la fortune proprement dite et celle qui est susceptible d'être transmise par succession¹. Théoriquement, la question mérite d'être

1. Par ex. J. Séailles, dans sa thèse, p. 30 : « Nous entendons par fortune la partie de l'ensemble des richesses appropriées par chaque individu qui est susceptible d'être transmise à d'autres individus après la mort du premier. » Il énumère les constitutions de dot, les partages anticipés, etc., nous ne comprenons pas. Pourquoi ne pas indiquer aussi les ventes, etc.

posée, on peut croire que les procédés de rente viagère et d'usufruit justifient une telle distinction; mais dans la pratique, l'impossibilité de la mesure et l'importance, assez faible, de ces actes de disposition permettent de les négliger.

La fraude s'y produit d'une manière plus systématique et on a pu déclarer qu'elle était surtout pratiquée par les héritiers des petites successions. Le fisc, en effet, néglige de poursuivre là où les droits en jeu sont faibles. Certaines natures de capitaux sont particulièrement aisées à dissimuler; aussi on ne trouve qu'une succession sur huit qui contienne du numéraire et on peut en dire autant du mobilier¹.

De plus, comme l'a dit Jacques Bertillon². « On est trop facilement porté à croire que la statistique des successions donne une image réduite, mais exacte, de la répartition des fortunes. Elle se rapporte à l'état des fortunes au moment de la mort, c'est-à-dire dans la vieillesse puisque plus des deux tiers des auteurs ont dépassé la soixantaine. Or le plus souvent, on n'est jamais si riche que lorsqu'on est vieux. »

En effet, d'après le *Bulletin de statistique* du ministère des finances, en 1906, pour 100 décès d'individus de moins de 25 ans, 6,3 % donnent lieu à l'ouverture d'une succession, de 25 à 40 le pourcentage monte à 45,9; il croît à 61,9 % et à 73,9 % pour les âges de 40 à 50 et de 50 à 60 ans. Il décroît ensuite à 70,6; 60,0 et 49,9 % pour les tranches suivantes, 60 à 70, 70 à 80 et plus de 80³.

1. Nous ne croyons pas que cela puisse tenir, comme l'indique J. Séailles, à la différence de composition des fortunes, en titres au porteur ou nominatifs.

2. *B. I. I. S.*, XVIII, 2, p. 369 à 434.

3. M. Borel a suggéré que la diminution de la proportion avec l'âge au-dessus de 60 ans était dû au fait que la proportion des femmes dans la po-

La commune mesure à laquelle il faudrait rapporter les successions dans les comparaisons de pays à pays est, non la population ou le chiffre des décès, mais celui des plus de 40 ans par exemple¹.

Enfin, il est permis d'envisager cette transmission de biens non seulement au départ, chez le *de cujus*, mais aussi à l'arrivée chez l'héritier. La division des richesses qui provient de la pluralité est susceptible de modifier l'inégalité par un étalement variable avec l'importance de la succession. Nous allons, en étudiant l'application de la loi de l'effet proportionnel, trouver une autre conséquence assez inattendue de ce fait.

§ 26. Si nous construisons le graphique habituel (figure VI), pour la répartition des successions, par exemple pour la France (1926), nous constatons que les points se répartissent sur deux droites distinctes. La limite de séparation correspond à environ 150.000 fr. L'ajustement réalisé pour les deux droites, donne une approximation satisfaisante (tableau XXIX). Ceci n'est pas accidentel, car il en est de même pour la France d'avant-guerre (1912); l'Angleterre et l'Italie (tableau XXIX et fig. VI).

pulation augmente avec l'âge. M. Bertillon, a démontré que l'influence de cette variation n'était pas suffisante. Il suggère que, dans l'extrême vieillesse, la maladie consomme le bien. Nous ajouterons l'influence des rentes viagères et des partages anticipés.

1. M. J. Bertillon a fait remarquer qu'en 1906, dans quinze départements français, le nombre des successions de 50 à 60 ans *dépassait* le nombre total des décès du même âge dans l'année. Voici l'explication par l'inspecteur général de l'enregistrement de cette bizarrerie :

1° Les héritiers ont un délai de six mois pour faire la déclaration, les deux phénomènes n'ont donc pas les mêmes limite de temps

2° Une succession peut être déclarée à un bureau d'enregistrement différent de celui du décès. On peut avoir son domicile au point de vue fiscal dans un département où on séjourne chaque année et cependant habiter la plus grande partie de l'année à Paris, par exemple. »

Ceci ne semble pas expliquer tout l'écart, qui atteint 49 % dans le Loiret. On voit, avec une netteté inquiétante, combien il est délicat d'interpréter des statistiques.

Tableau XXIX. — Successions¹

<i>x</i> francs	France 1926		France 1912	
	N réel	N calculé	N réel	N calculé
0. . .	403 990	403 990	358 921	358 921
500. . .	358 499	357 330	255 793	257 346
2 000. . .	286 000	287 439	162 010	160 438
10 000. . .	147 822	146 649	61 068	62 930
50 000. . .	37 413	37 773	15 269	14 716
100 000. . .	17 298	16 867	7 531	7 375
250 000. . .	6 257	6 403	2 934	2 813
500 000. . .	2 698	2 808	1 304	1 256
1 million .	1 135	1 131	536	510
2 —	420	424	184	193
5 —	115	101	47	46
10 —	30	30	17	16
50 —	3	1,2	1	0,8

Angleterre (1913-14)			Italie (1910-12)		
<i>x</i> £	N réel	N calculé	<i>x</i> livres	N réel	N calculé
0. . .	91 680	91 680	0. . . .	147 949	147 949
100. . .	74 642	74 109	500. . . .	102 643	101 789
500. . .	35 819	35 755	1 000. . . .	76 720	73 011
1 000. . .	23 962	23 512	2 000. . . .	51 897	50 895
10 000. . .	4 421	4 409	4 000. . . .	31 514	32 505
25 000. . .	1 707	1 714	10 000. . . .	14 621	14 610
50 000. . .	758	756	50 000. . . .	3 287	3 299
75 000. . .	473	445	100 000. . . .	1 428	1 494
100 000. . .	318	309	300 000. . . .	378	362
150 000. . .	163	167	500 000. . . .	174	173
250 000. . .	86	81	1 million. .	68	58
500 000. . .	32	26			
1 million .	11	8			

Formules ;

France 1926

$$x < 1\ 0\ 000 \quad z = 0,987 \log (x + 100) - 5,713 \quad \text{Indice } 161$$

$$x > 150\ 000 \quad z = 0,750 \log x - 2,420 \quad \text{» } 157$$

France 1912

$$x < 70\ 000 \quad z = 0,810 \log (x - 2) - 2,76 \quad \text{» } 124$$

$$x > 70\ 000 \quad z = 0,667 \log x - 1,891 \quad \text{» } 110$$

Angleterre (1913-1914)

$$x < 1\ 200 \text{ Livres. } \quad z = 0,816 \log (x - 5) - 1,962 \quad \text{» } 123$$

$$x > 1\ 200 \quad \text{»} \quad z = 0,742 \log (x) - 1,792 \quad \text{» } 115$$

Italie (1910-11)

$$x < 9\ 000 \text{ livres } \quad z = 0,805 \log (x - 200) - 2,317 \quad \text{» } 124$$

$$x > 9\ 000 \quad \text{»} \quad z = 0,731 \log (x) - 2,013 \quad \text{» } 137$$

1. Annuaire statistique 1926 : 1^{re} partie p. 196 et 1913, 1^o p. 212
 Angleterre : Bulletin S. G. P. t. III p. 249. Italie : Bulletin S. G. F.
 t. II p. 244.

Dans ce tableau, N, désigne comme d'habitude le nombre des successions dont le montant est supérieur à x unités monétaires.

§ 27. Or si nous construisons le graphique relatif aux parts successorales (1911), on obtient une droite unique. La loi de l'effet proportionnel s'applique dans les mêmes conditions que pour les revenus et les fortunes. (Tableau XXX et figure VI.)

Tableau XXX. — Parts successorales (1911). France

x fr.	N observ.	N calc.
0. . .	981 123	981 123
500. . .	480 779	479 768
2 000. . .	235 224	242 337
10 000. . .	70 226	67 069
50 000. . .	16 747	16 973
100 000. . .	7 863	8 143
250 000. . .	2 701	2 924
500 000. . .	1 004	922
1 million.	353	333
2 —	120	123
5 —	23	22

Formule : $r = 0,686 \log (x - 200) - 1,720$
Indice : 145.

Les petites fortunes sont plus divisées que les grandes; en effet, le rapport du nombre des parts des tranches à celui des successions de la même tranche ne correspond pas à la réalité, puisqu'une succession de 300.000 fr., par exemple, donne 3 parts de la catégorie inférieure. Cependant ce rapport peut servir à calculer le nombre moyen qui divise les différentes tranches de successions. M. Bertillon a ainsi trouvé qu'au-dessous de 100.000, il y a 2,78 parts, de 100.000 à 500.000 2,19; de 500.000 à 1 million

1,87, etc.¹. Donc l'inégalité des parts doit être voisine de celle des grosses successions, ce qu'on constate (150 et 145). On peut donc penser que la loi particulière des successions est due à cette division, variable avec l'importance de la fortune du *de cujus*.

§ 28. **Les statistiques successorales de la France.** — Le tableau XXXI montre l'évolution de la répartition successorale pour l'ensemble de la France de 1902 à 1927².

Tableau XXXI. — Successions en France

	ANNÉE	N EN MILLIERS	SUCCESSION MOYENNE	INDICE	
				Faible	Fort
<i>Successions</i>	1902	363,6	13 100	129	143
—	1903	386,0	12 750	129	153
—	1904	381,6	13 800	129	151
—	1905	385,0	14 900	127	140
—	1906	»	»	»	»
—	1907	401,6	13 600	126	141
—	1908	»	»	»	»
—	1909	379,4	15 100	122	154
—	1910	359,8	14 750	125	155
—	1911	359,1	15 650	126	154
—	1912	358,9	15 800	124	150
—	1913	360,5	15 300	125	145
<i>parts</i>	1905	1 047,5	5 470	»	150
—	1911	981,1	5 680	»	145
<i>Successions</i>	1925	385,9	23 300	104	136
—	1926	404,0	28 500	101	137
—	1927	381,5	31 400	102	135

1. *B. I. I. S.*, XVIII, 2, 380. Le rapport brut dont nous avons parlé varie de 5,88 à 0,55.

2. M. Séailles, dans sa thèse, étudie les répartitions de 1903 à 1907. Il écarte 1902, car le classement en neuf catégories seulement ne lui permet pas les comparaisons. Les chiffres de 1906 et 1908 manquent, une circulaire du 26 juin 1905 avait prescrit l'établissement régulier de statistiques spéciales pour les années à millésime pair, les autres statistiques étant maintenues pour les autres. En 1910, on est revenu au régime normal. Enfin l'Enregistrement a repris seulement en 1925 l'établissement de statistiques succes-

N désigne le nombre total de successions imposées. Nous avons considéré deux indices d'inégalité, dit faible et fort. L'indice faible, par exemple, correspond aux successions inférieures à la limite de séparation entre les deux droites que nous avons trouvée précédemment. Il est plus petit que l'indice « fort ». Si nous nous reportons à l'interprétation dynamique de la formule (voyez la première partie, chapitre VII, § 10), on voit que les grosses fortunes mesurées au décès sont moins stables.

Le nombre des successions ouvertes, varie très peu, en 25 années l'écart ne dépasse pas 10 %. La diminution due aux pertes de la guerre est presque compensée par l'appoint de l'Alsace-Lorraine. On peut se montrer surpris de ce que la succession moyenne n'ait qu'un peu plus que doublé depuis 1902. On doit remarquer que la valeur des propriétés foncières ou des titres qui composent la majeure partie de l'actif des successions n'a point subi la même hausse que les prix des marchandises et de la plupart des éléments qui entrent dans le coût de la vie.

L'inégalité paraît avoir baissé, les deux indices, « fort, et « faible », accusent une diminution assez nette, près de 20 %. C'est ce que le rédacteur du *Bulletin de la S. G. F.*¹ indiquait après examen des répartitions de 1927 et 1913. « Quant à la répartition ci-dessus, elle paraît indiquer une tendance à la moindre concentration des grosses fortunes en un petit nombre de mains... Il apparaît donc ainsi que la part relative des grosses fortunes aurait un peu diminué. »

sonales qui avait été suspendu pendant la guerre. Les tarifs de mutation par décès ont été modifiés principalement en 1910 et en 1926.

Nous avons écarté comme l'avait fait M. Séailles la correction qui consiste à augmenter les successions inférieures 2.000 fr.-or, correction qui suppose la fraude plus importante pour cette tranche. En effet elle est très petite et son influence est nulle.

1. *Bulletin S. G. F.*, XIX, mars 1930, p. 206.

L'indice faible paraît avoir un mouvement oscillatoire de période, 7 ou 8 ans. A vrai dire, ce n'est pas très net. On peut en tout cas retenir la faible variation de l'indice pendant la longue période d'avant-guerre.

§ 29. Il est intéressant, en vue d'étudier ce phénomène de diminution de l'inégalité des successions après la guerre, d'utiliser les répartitions par département. Les départements industriels sont-ils favorisés ? ou, est-ce le cas des départements agricoles ?

Les chiffres que l'on est obligé d'utiliser sont sujets à caution. N'avons-nous pas vu les successions être plus nombreuses, dans certains cas, que les décès correspondants ?

Sous cette réserve, voici ce que donne leur étude (tableau XXXII). La S. G. F. appelle « industriel » un département si 40 % au moins de la population active *totale* est occupée dans l'industrie, et « agricole » si 50 % de la population active *masculine* est occupée dans l'agriculture; *i* et *a* sont les pourcentages en 1906 et 1921, correspondant aux départements choisis. Nous avons pris la Seine et les quatre départements de chaque catégorie qui ont les plus forts pourcentages. Ils seront, en principe, les plus caractéristiques. Le nombre total des successions a varié dans des sens divers de 1912 à 1926¹. La succession moyenne a augmenté partout, mais beaucoup plus dans les départements agricoles (150 % d'augmentation contre 70). Enfin, l'inégalité a toujours augmenté dans les départements agricoles (6 % en moyenne) et a presque

1. La baisse constatée pour le département de la Seine est due à ce que nous n'avons pas compté les successions classées dans la catégorie domaines (*Annuaire statistique*, 1928.) On obtiendrait un total de 22.169.

partout baissé dans les autres¹. L'accession à la propriété privée des paysans et l'élévation des salaires des ouvriers ont donc agi en sens inverse, augmentant ou diminuant l'inégalité. La seule exception à cette règle est la Loire, dont l'indice a légèrement baissé. Mais ce département a une population agricole assez importante.

§ 30. **L'impôt sur les successions aux Pays-Bas.** — M. Methorst a donné dans le *B. I. I. S.*, tome XX, 2, 863,

Tableau XXXII. — Successions dans quelques départements

Départements	Année	N	Moyenne	Indice faible	i p. 100	a p. 100
Seine	1912	17 988	103 200	153	55	1
	1926	13 656	166 800	130	55	1
Nord	1912	10 880	20 900	129	64	16
	1926	18 218	25 300	118	64	13
Meurthe-et-Moselle	1912	4 790	16 400	123	55	24
	1926	5 386	33 100	111	59	17
Loire	1912	4 554	14 750	105	55	32
	1926	5 595	19 550	108	56	27
Rhône	1912	6 595	20 450	132	51	21
	1926	6 120	47 600	105	55	16
Gers	1912	2 584	5 500	94	16	72
	1926	2 880	11 250	96	12	76
Lot	1912	2 681	3 090	91	14	74
	1926	2 610	8 400	93	11	73
Creuse	1912	2 097	7 300	98	17	72
	1926	2 223	18 150	110	14	73
Lozère	1912	1 237	3 340	97	15	69
	1926	1 135	10 450	105	13	72

une série très complète de données sur ce sujet. L'impôt existe depuis 1859, mais on ne peut faire de comparaisons

1. Nous n'avons pas utilisé l'indice fort, les grosses successions sont trop peu nombreuses en province pour permettre le calcul de l'indice. (Plus des deux tiers des successions de plus de dix millions viennent de Paris.) L'indice fort de la Seine est, en 1926, 138 donc très voisin de celui de la France. On a souvent écrit le contraire, faute d'une définition précise de l'inégalité, par exemple M. F. Faure (*B. I. I. S.*, Rapport sur la contribution que peut apporter la statistique financière à l'étude des phénomènes sociaux politiques, économiques et juridiques, XIV, 3, 20). « Ce n'est pas seulement par la masse totale de ses capitaux que Paris se distingue. C'est aussi par leur *concentration dans un petit nombre de mains*. Les chiffres de 1902 le démontrent d'une manière *indiscutable*. » Suit le raisonnement habituel par comparaison des pourcentages.

utiles que depuis 1879 par suite de la loi du 1^{er} juillet 1878 qui établit des droits dans la ligne directe. Comme l'indique M. Methorst, il faut comparer le nombre total des successions, non à la population moyenne, car on ne tient pas compte des changements de la mortalité dans le temps, mais au nombre total des décès après avoir déduit le nombre des personnes décédées avant l'année du calendrier où elles auraient atteint l'âge de 21 ans. C'est ce que nous avons désigné par D dans le tableau XXXIV deuxième colonne). On ne peut pas éviter l'inconvénient déjà signalé par J. Bertillon (*B. I. I. S.* XVIII, 2, 369) : le nombre des successions dans une année ne coïncide pas avec le nombre de personnes dont la succession a été ouverte cette année-là. Cela a d'ailleurs peu d'importance, comme on le conçoit aisément.

Tableau XXXIII. — Pays-Bas. Impôt sur le capital (*B. I. I. S.* XX, 2, 880)

Années fiscales	Population (milliers)	N	p	C
1893-94	4.710	77.195		99,7
1894-95	4.769	77.672	69.627	100,4
1895-96	4.830	78.700	69.424	100,0
1896-97	4.895	78.422	70.117	100,8
1897-98	4.964	78.243	70.194	101,0
1898-99	5.032	78.819	70.610	102,2
1899-00	5.091	79.912	71.809	100,9
1900-01	5.166	80.712	71.551	100,2
1901-02	5.243	82.038	72.278	101,2
1902-03	5.323	83.558	72.137	101,0
1903-04	5.402	85.192	71.501	100,4
1904-05	5.479	87.470	71.091	100,1
1905-06	5.556	88.750	71.930	100,9
1906-07	5.632	89.763	72.422	101,6
1907-08	5.705	90.969	71.824	101,9
1908-09	5.772	92.698	71.248	101,9
1909-10	5.838	94.546	72.908	102,9

N Nombre de personnes imposées (à partir de 13.000 florins).

p Capital mo en imposé.

C Indice d'inégalité.

Période	1893-1898	1899-1908
N	78 175	86 106
Indice C	100,6	101,2

Tableau XXXIV. — Successions (B. I. I. S. XX, 2, 884)

Années	D (milliers)	N	p	C
1879	44,6	9.111	24.650	114,3
1880	43,6	9.508	28.250	113,7
1881	43,8	9.507	27.400	114,8
1882	42,8	9.036	28.350	113,9
1883	45,3	9.612	25.350	114,7
1884	43,4	9.070	25.550	111,9
1885	45,4	9.630	26.950	112,1
1886	45,0	9.109	25.550	114,5
1887	44,6	9.104	25.850	112,1
1888	46,2	8.862	27.050	112,7
1889	45,8	8.997	26.950	118,9
1890	49,7	10.090	24.750	111,0
1891	50,0	9.734	29.700	117,3
1892	52,8	11.195	27.700	116,2
1893	47,4	8.363	27.450	117,2
1894	47,7	9.977	25.900	116,8
1895	47,2	9.226	26.850	115,7
1896	44,8	8.919	26.150	116,3
1897	45,8	8.982	26.100	117,9
1898	46,0	9.154	23.450	113,7
1899	48,9	9.507	26.500	112,8
1900	52,0	11.101	26.550	116,3
1901	47,7	9.799	24.400	112,9
1902	48,6	9.849	30.300	118,2
1903	47,0	9.943	28.800	116,1
1904	47,9	9.981	27.850	111,8
1905	49,0	10.435	29.650	115,8
1906	48,1	10.210	26.750	115,0
1907	50,9	10.663	25.550	115,1
1908	51,5	11.024	28.800	114,0
1909	51,0	11.089	27.350	116,9

D Nombre des décès des personnes majeures.

N Nombre de successions de solde net supérieur à 300 florins.

p Succession nette moyenne.

C Indice d'inégalité.

Période	1893-98	1899-1908
N	9 104	10 251
Indice C	116,1	114,9

Nous possédons donc une série de 31 années ininterrompues. Il est particulièrement instructif de voir la stabilité de l'indice d'inégalité, stabilité d'autant plus remarquable que tous les statisticiens connaissent les variations imprévues des statistiques de successions. L'indice C oscille de 111,0 à 118,9 soit de 7 %.¹ Malgré tous nos efforts, il ne nous a pas paru possible de trouver une liaison, aussi faible soit-elle, entre les variations de l'inégalité et celles des autres facteurs, nombre de décès, nombre de successions, succession moyenne. Les maxima de l'indice en 1881, 1889, 1897, 1902, 1905, 1909, les minima en 1884, 1895, 1899, 1904, 1907 marquent les oscillations extrêmes du mouvement. On peut les rattacher à diverses crises. 1889 et 1898 sont des années de crise agricole. Cependant il ne faut pas aller trop loin et on peut seulement donner l'indication que les crises sont accompagnées d'une baisse importante de l'inégalité. (Cf. les revenus.)

En tout cas, il est certain qu'il n'existe aucun mouvement vers un accroissement ou une diminution de cette inégalité. Les indices pour les périodes de 1893 à 1898 et de 1899 à 1908 sont trop rapprochés pour permettre le doute.

Le rapprochement des indices fournis par la répartition des fortunes et celle des successions, montre qu'elles sont très comparables². Les grandes fortunes étant généralement obtenues à un âge avancé, la répartition des successions doit être plus inégale : c'est ce que l'on constate.

1. Les variations de D (nombre des décès de personnes majeures), n , (nombre des successions) et de p (succession moyenne) semblent dues au hasard, en d'autres termes, on ne constate pas de mouvement de longue durée. D varie de 10 %, N de 20 % et p 20 %. L'indice d'inégalité est donc plus stable.

2. C'est ce que soutenait J. Séailles. M. J. Bertillon, soutenait le contraire. Il est à remarquer que la répartition de fortunes ne concerne que celles qui dépassent 13.000 florins. C'est ce qui explique la différence des moyennes.

*L'inégalité des fortunes et des successions à travers le monde***Tableau XXXV. — Indices d'inégalité de diverses répartitions d'après les statistiques d'impôts sur la fortune ou les successions**

FORTUNES.			SUCCESSIONS		
<i>Europe.</i>			(suite)	indice	
		Indice.		faible	fort
Bâle	1429	140	—	1913	125 145
—	1446	135	—	1925	104 136
—	1451	119	—	1926	101 137
—	1453	137	—	1927	102 135
—	1454	153	Allemagne.....	1927	91 110
—	1476	131	Alsace-Lorraine	1906	83 130
—	1887	108	Angleterre.....	1895	124 137
Neufchâtel	1874	136	—	1900	123 143
Francfort	1420	106	—	1905	125 144
Angleterre.....	1688	103	—	1908	122 137
Pays-Bas	1893	100	—	1911	119 143
—	1894	100	—	1912	128 135
—	1895	100	—	1913	123 135
—	1896	101	Belgique	1906	95 146
—	1897	101	Espagne	1901	» 110
—	1898	102	—	1902	» 118
—	1899	101	—	1903	» 108
—	1900	100	—	1904	» 113
—	1901	101	—	1905	» 105
—	1902	101	—	1906	» 103
—	1903	100	—	1907	» 103
—	1904	100	—	1908	» 104
—	1905	101	Italie	1903	127 137
—	1906	101	—	1907	119 141
—	1907	102	—	1910	124 137
—	1908	102	Roumanie	1903	» 153
—	1909	103	Pays-Bas (cf. tableau)	1879	114
Allemagne.....	1924	111	—	1884	112
—	1925	118	—	1889	119
			—	1894	117
			—	1899	113
			—	1904	112
			—	1909	117
SUCCESSIONS.					
<i>Europe.</i>			<i>Océanie.</i>		
		Indice			
		Faible Fort			
France	1902	129 143	N.-Galles du Sud	1903	137
—	1903	129 153	—	1904	136
—	1904	129 151	—	1905	136
—	1905	127 140	—	1906	127
—	1907	126 141	—	1907	147
—	1909	122 154	—	1908	136
—	1910	125 155	—	1909	128
—	1911	126 154	—	1910	129
—	1912	124 158	—	1911	139
			—	1912	311

§ 31. Voici quelques brefs renseignements sur les statistiques qui nous ont servi pour le tableau XXXV.

En *Allemagne*, l'impôt sur les successions comporte cinq classes, nous avons formé une répartition équivalente à celle de la France ou à peu près en ajoutant les successions de la classe I (conjoint et enfants) et celles entre époux exonérées d'impôts. C'est un impôt qui appartient au Reich pour les deux tiers depuis la réforme fiscale de 1906. (La répartition commence à 5.000 mk.)

L'*Angleterre* ne distingue pas les successions et les donations entre vifs. Il est vrai que ces dernières sont moins nombreuses qu'en France, cela est donc peu important.

En *Alsace-Lorraine*, les successions en ligne directe ou entre époux (inférieures à 1000 mk.), ne sont pas imposées en 1906.

La loi *belge* est très libérable, puisqu'elle met en dehors de l'impôt les valeurs mobilières et les autres meubles des familles à enfants,

Le taux de l'impôt de l'*Espagne* a changé en 1900 et 1906, d'où des fraudes sensibles surtout dans le nombre des déclarations, ceci paraît être sans influence sur l'inégalité.

En *Italie* les statistiques portent sur le montant *brut* de successions, les taxes sur le montant *net*. On doit le rapprocher de la coutume française où avant la guerre, les statistiques donnaient les valeurs *énoncées*, c'est-à-dire tous les biens ayant figuré à un titre quelconque dans les déclarations, soit comme ayant appartenu en propre au défunt, soit comme dépendant de la communauté conjugale dont une partie doit revenir aux héritiers.

En *Roumanie* les fortunes immobilières rurales peu

importantes (au-dessous de cinq hectares) sont exemptées de l'impôt.

Dans les *Nouvelles-Galles*, seules les fortes successions sont frappées (au-dessus de 1000 £). Ceci explique que nous considérons seulement l'indice fort.

Il est à peine besoin de faire remarquer que les indications¹ précédentes sont relatives aux époques correspondantes à nos calculs.

4^o Conclusion.

§ 32. Les deux tableaux XXII et XXXV résument les données observées sur la répartition des revenus, des fortunes et des successions. Que donne leur examen ?

L'indice qui mesure l'inégalité est très stable d'une année à l'autre, ce qui est, comme nous l'avons fait souvent remarquer, est un argument très probant en sa faveur. En France, l'indice des revenus de 1919 à 1927 oscille entre 94 et 103; au Japon de 1899 à 1908, il reste entre 91 et 95, etc... pour les fortunes et les successions, l'exemple des Pays-Bas est péremptoire.

L'inégalité varie peu dans le temps, elle ne possède sans doute que des mouvements cycliques liés au mouvement général des affaires. L'exemple de Bâle ou de Francfort depuis le moyen âge est probant; si l'on objecte l'incertitude des données, il faut se borner à des périodes plus courtes, la Prusse de 1852 à nos jours, la Saxe depuis 1878, l'Angleterre depuis 1843, etc... Les variations brusques sont rares, la plus frappante est celle du Japon 1898

1. La plupart des renseignements précédents proviennent de l'article de J. Bertillon : Statistique des successions en France et à l'étranger (*B. I. I.* S., XVIII, 2, 369).

elle reste d'ailleurs sans explication satisfaisante. Souvent on constate une relation avec les crises (France, Pays Bas). Mais cette liaison reste encore hypothétique.

Les différents pays étudiés ont des inégalités très comparables, en effet, pour les revenus celle-ci varie de 91 (Japon 1899) à 148 (Prusse 1892). Or cette variation relative de 50 % est assez faible, puisque nous trouverons pour les salaires des inégalités voisines de 20 et descendant beaucoup plus bas. Pour les fortunes, de nos jours, l'inégalité reste comprise entre 100 et 118 (sauf une exception), mais il est vrai que les données sont rares. Pour les successions, l'indice faible oscille avant la guerre autour de 125 pour les différents pays étudiés, il paraît avoir baissé depuis. Peut-être y a-t-il là seulement une conséquence des particularités de la mortalité militaire.

§ 33. On peut essayer de *classer les pays* suivant leur inégalité afin de rattacher celle-ci à quelque caractéristique déjà connue.

Inégalité forte (au-dessus de 110, pour les revenus et par analogie pour les successions) :

Prusse, Autriche, Danemark Angleterre, Japon (avant 1898), Nouvelles-Galles du Sud, Bâle (moyen âge), Roumanie.

Inégalité faible :

France, Saxe, Italie, Norvège, Japon moderne, Pays-Bas, Belgique, Espagne, Allemagne actuelle.

Nous avouerons volontiers que la raison d'un tel classement ne nous apparaît guère, à peine peut-on suggérer l'existence d'une classe de propriétaires ruraux (Prusse, Autriche, Angleterre, Japon ancien). Ceci paraît contredit par l'étude de la répartition des successions dans les

départements ruraux et industriels de la France, qui nous a montré que les départements agricoles étaient en général de petite inégalité. Aussi nous contentons-nous de poser la question.

Section B. — Les revenus de la propriété.

§ 34. Le propriétaire peut, ou user personnellement de la chose, ou en louer la jouissance temporaire. De ces deux sources de revenu, la seconde seule est, en général, évaluée en monnaie et la première donne rarement lieu à estimation et à dénombrement. Enfin les statistiques de ventes d'immeubles ou de dépôts de titres qui portent sur les inégalités des biens renseigneront sur les inégalités de répartition des revenus correspondants.

1° *Inégalités des revenus.*

§ 35. L'étude des loyers constituait, autrefois, une des rares voies d'accès à l'étude de la répartition des revenus en France. Leroy-Beaulieu en particulier, y attachait une grande importance. Il discute longuement dans son ouvrage la proportion du revenu consacré au loyer. Pour l'année 1878 et pour Paris, il admet un coefficient de proportionnalité de un sixième jusqu'à 1.500 fr., d'un huitième de 1.500 à 6.000 fr. et d'un dixième au-dessus. Le tableau XXXVI donne le nombre N des loyers supérieurs à x fr., y est le revenu estimé d'après les coefficients¹.

1. Les statistiques proviennent, pour 1878, du *J. S. S. P.* (février 1880), pour 1888, de l'ouvrage de Pareto (n° 958) et pour 1913, du *B. S. G. F.*, 2, 390.

Tableau XXXVI. — Loyers Paris 1878

<i>x</i> FRANCS	N OBSERVÉ	N CALCULÉ	<i>y</i>	<i>Formule :</i>		
				<i>z</i> = 0,969 log (<i>x</i> — 100) — 1,899		
0	684.922	684.922	0	Loyers		
300	216.281	219.096	2.400			
750	80.898	82.986	6.000			
1.000	59.751	59.324	7.500			
1.250	42.549	44.339	10.000			
1.500	36.351	35.617	12.000	ANNÉE	N TOTAL	INDICE
3.000	14.898	13.555	32.000			
6.000	4.913	4.451	70.000	1878	684.922	103
10.000	1.864	1.814	133.000	1888	»	93
20.000	421	462	266.000	1913	1.009.923	92

Le loyer x de la première colonne est la valeur locative admise pour l'impôt mobilier, elle est, par suite, inférieure au chiffre réel d'environ un tiers. La comparaison des valeurs de N observées et calculées est très satisfaisante. Dans la formule indiquée, x_0 a une signification très nette et il convient de le remarquer. 100 fr. représente le minimum du prix du loyer. En effet, Leroy-Beaulieu admet qu'en 1880, la moitié des indigents a un loyer de 200 fr, L'inégalité des loyers de 103 pour 1878 atteint 92 en 1913. on peut essayer d'en déduire l'inégalité des revenus, au moyen des valeurs estimées du revenu (colonne des y). On obtient une inégalité de 120. (Graphique fig. VII.) Or nous avons trouvé pour la France actuelle un indice voisin de 100. Faut-il en conclure que l'inégalité des revenus a diminué ? nous ne le croyons pas. La méthode de Leroy-Beaulieu est très critiquable. Et M. de Foville, dans l'*Economiste français* du 10 juillet 1880, critique déjà ces résultats en utilisant les relevés de l'Administration des pompes funèbres. « La méthode des loyers ferait plutôt la part trop grande aux riches que trop petite ». En d'autres termes, l'inégalité est augmentée par cette méthode.

§ 36 Les *propriétés bâties* et les *propriétés foncières* ont des revenus nets qui suivent la loi de l'effet proportionnel. C'est ce que montre le tableau XXXVII.

Tableau XXXVII

Propriétés bâties (1899-1900).			Propriétés foncières (1850)		
<i>x</i> francs	N observé	N calculé	<i>x</i> francs	N observé	N calculé
0	905.879	905.879	0	738.512	738.512
500	208.171	200.200	800	69.598	70.346
1.000	93.373	98.528	4.000	10.941	11.077
1.500	62.426	61.153	10.000	3.500	3.460
2.000	44.746	44.986			
2.500	33.217	33.290			
4.000	17.020	17.156			

Bâties $z = 0,83 \log (x - 50) - 2,064$. Indice : 102.

Foncières $z = 0,85 \log (x - 40) - 1,300$. Indice : 128.

Les chiffres nous sont fournis par E. Macquart (revision décennale du revenu net des propriétés bâties *J. S. S. P.*, 1902, p. 418) et par de Laveleye dans un rapport cité par Leroy-Beaulieu (p. 174). Ces derniers chiffres sont relatifs à la Belgique. Il est frappant de voir que les indices d'inégalité de tous ces revenus sont très voisins de l'indice général. On doit y voir une preuve de plus de la valeur de la définition mathématique de l'inégalité.

2^o Inégalités des propriétés.

§ 37. Les *dépôts de titres* donnent une image assez fidèle de la répartition des portefeuilles de valeurs. Il serait très intéressant de pouvoir les étudier soigneusement. Deux voies s'ouvrent pratiquement : l'étude de la

répartition des titres nominatifs d'une société d'après le nombre de titres par propriétaire (aux dépôts du siège de la société) ou l'étude des dépôts dans les banques. La première méthode ne pouvait conduire à des résultats probants malgré les espoirs de ceux qui l'ont prônée. (Neymarck par ex. *J. S. S. P.*, 1903 : « Le morcellement des valeurs mobilières ».) En effet, chaque société a sa clientèle particulière, et des résultats d'une certaine généralité ne pourraient s'obtenir qu'en sommant de nombreux résultats élémentaires, ce que l'on ne peut faire à l'heure actuelle.

M. des Essars (*J. S. S. P.*, 1897, p. 321) a utilisé la seconde méthode; il a choisi au hasard 1.032 dépôts de titres à la Banque de France, puis les a évalués au cours de la Bourse au 30 juin 1896.

Le tableau XXXVIII donne la répartition qu'il a observée et montre l'application de la loi de l'effet propor-

Tableau XXXVIII. — Portefeuille des dépôts de Banques

x FRANCS	N OBSERVÉ	N CALCULÉ	Formule : $z = 1,037 \log x - 4,492$
			Indice :
0	1.032	1.032	96
2.000	947	937	
4.000	881	894	Moyennè observée : 67.000 fr.
6.000	813	813	— calculée : 73.000 »
8.000	763	759	
10.000	708	711	
20.000	540	547	
30.000	419	420	
50.000	300	302	
100.000	151	141	
300.000	45	46	
500.000	24	25	
1.000.000	9	11	

tionnel. Celle-ci est très satisfaisante puisque, de 0 à 50.000 fr., l'erreur moyenne est de 7 % avec deux para-

mètres seulement. L'inégalité est de 96. Si on veut bien admettre que ce choix, fait au «hasard» représente, l'inégalité des portefeuilles en France, on verra que cette inégalité est, en 1896, bien voisine de celle des revenus en général pour 1927.

§ 38. Les *ventes d'immeubles* nous renseignent sur la répartition de la propriété urbaine; de façon peu étroite, nous l'avouons, car plusieurs immeubles vendus par le même propriétaire ne sont pas réunis dans la statistique, mais il est rare qu'ils soient achetés par le même acheteur. De plus, tous les propriétaires n'ont pas le même besoin de vendre, etc..

Voici une répartition pour 1894 tirée d'un mémoire de F. Faure (Rapport sur la contribution que peut apporter la statistique financière à l'étude des phénomènes sociaux, politiques économiques et juridiques, *B. I. I. S.*, XIV, 3, 20).

Tableau XXXIX. — Ventes d'immeubles urbains, France 1914

X FRANCS	N OBSERVÉ	Z
0	112.513	
500	88.608	— 0,565
1.000	71.442	— 0,261
5.000	30.859	+ 0,424
10.000	17.261	0,722
20.000	8.493	1,016
50.000	2.897	1,377
100.000	1.325	1,600
200.000	554	1,826
300.000	293	1,97
400.000	194	2,07
500.000	133	2,15
700.000	65	2,30
1.000.000	30	2,45
1.500.000	14	2,59

Le tableau XXXIX donne, à droite des valeurs de N recensées, les valeurs de la variable z utilisée dans la 1^{re} partie. Le lecteur pourra ainsi construire le graphique sans calcul et constater que les points sont bien en ligne droite. On obtient une inégalité de 111, la statistique équivalente pour les immeubles ruraux donne 106, l'ordre de grandeur est le même. Les prix moyens des immeubles sont très différents, comme on pouvait s'y attendre, 8.840 fr. pour les urbains, 1.380 pour les ruraux.

§ 39. Le classement des *cotes foncières* (Y. Guyot, *B. I. I. S.*, XIV, 3, 94) fournit des indications analogues. 14.074.801 cotes de 3,50 hectares de moyenne ont une inégalité de 119. Ceci ne donne pas évidemment la répartition des biens possédés par les particuliers, puisque chaque propriétaire possède plusieurs cotes; mais l'indication est intéressante. Elle est corroborée par l'indice d'inégalité des *exploitations agricoles* égal à 108, 5.702.600 exploitations se partageant 39.757.100 hectares, soit 6,95 de moyenne.

Tout ceci mériterait, sans doute, une étude plus approfondie et un appareil statistique plus complet. Mais nous avons voulu montrer une nouvelle extension de la loi de l'effet proportionnel. Nous avons ainsi obtenu de nouvelles indications sur la répartition des propriétés en France. Toutes concordent à fixer aux environs de 100 l'indice d'inégalité français, qu'il s'agisse de revenus en général, de ceux des propriétés bâties ou foncières, des loyers ou des capitaux mobiliers ou immobiliers.

Section C. — Les revenus du travail.

§ 40. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, comment on étudiait, jusqu'ici, les salaires; méthode des moments, polynômes de degré élevé, quartiles enfin, furent utilisés successivement pour la comparaison de l'inégalité dans l'espace et dans le temps. L'intervention de notre indice ne se justifie que par un contrôle de l'application de la loi de l'effet proportionnel.

Le tableau XL et la figure VIII permettent ce contrôle préalable à toute utilisation de l'indice. Il s'agit de la répartition des salaires d'après leur importance dans trois industries du Royaume-Uni, choisies parmi les plus importantes. Les chiffres proviennent des enquêtes entreprises en 1906 et 1907 par le Board of Trade. Celui-ci a relevé le montant du salaire hebdomadaire pendant la dernière semaine de paye du mois de septembre pour les ouvriers adultes du sexe masculin travaillant à pleine semaine. Quand cette période avait été affectée par des circonstances exceptionnelles, telles qu'une grève ou un lock-out, les chiffres relevés étaient ceux d'une autre semaine du même mois. Enfin, les observations portent sur une fraction importante du personnel total, environ 50 %.

Une fois une droite ajustée, il est facile de calculer les valeurs de n , le nombre d'ouvriers par tranche. Il est inutile de les calculer toutes, un coup d'œil sur les nombres observés montre des fluctuations bizarres que l'on peut attribuer souvent à l'influence du *nombre rond*. Il faut donc, pour permettre une comparaison convenable, ajuster préalablement les chiffres observés, ce que nous avons fait

Tableau XXXX. — Salaires en Angleterre en 1906-1907

n désigne le nombre d'ouvriers ayant un salaire compris dans les limites données. — * désigne les modes principaux,

Limites des Salaires en Shillings 1	COTON		BATIMENT		CHEMINS DE FER	
	<i>n</i>		<i>n</i>		<i>n</i>	
	obs.	calc.	obs.	calc.	obs.	calc.
2	3	4	5	6	7	
Moins de 12 ..	165		16		430	
12 à 13	122	263	85	22	794	1.790
	229		25		1.377	
	561		88		3.839	
15 à 16	1.215	885	212	141	5.243	8.130
	1.199		271		7.749	
	1.680		227		16.542	
	2.246		759		31.980	
	1.654		373		26.916*	
20 à 21	2.838	2.123	1.264	1.092	31.858	21.400
	2.769		1.182		30.112	
	2.883		1.577		25.455	
	2.471		1.905		19.913	
	2.868*		1.939		28.215	
25 à 26	2.813	2.550	2.821*	2.200	23.191	20.700
	2.341		1.204		11.782	
	2.067		1.578		14.817	
	2.030		1.346		10.538	
	1.686		1.974		4.579	
30 à 31	2.132	2.180	2.251*	2.340	17.842*	11.800
	1.369		1.099		3.511	
	1.534		1.547		6.112	
	1.052		1.541		7.676	
	1.044		1.611		2.677	
35 à 36	1.277	1.500	2.950	1.880	2.826	5.840
	982		2.762		5.098	
	896		2.737		1.260	
	970		3.852*		1.135	
	833		2.608		2.559	
40 à 41	1.356*	936	2.377	1.160	1.348	2.320
	845		708		113	
	1.047		944		6.423	
	815		1.757*		118	
	838		339		199	
45 à 46	1.116	525	891	630	8.601*	1.058
	707		243		95	
	566		281		422	
	524		99		1.056	
	372		61		31	
50 à 51	816	286	513	313	387	271
	305		25		41	
	331		57		55	
	166		23		37	
	167		16		60	
55 à 56	236	141	164	144	187	84
	126		15		15	
	90		14		49	
	62		21		18	
	47		8		3	
60 à 61	125	76	185	64	206	39
	29		5		12	
	12		10		3	
	16		42		34	
	10		1		53	10
65 et plus	124	45	233	183	309	
TOTAL	56.774		50.836		36.590	

par la formule de Woolhouse¹. Les colonnes 3, 5, 7, donnent les valeurs de n calculées par la loi de l'effet proportionnel, voici quelques chiffres ajustés :

	25 à 26 sh	40 à 41 sh.	50 à 51 sh.
Chiffre ajusté	2.555	991	246
Chiffre calculé	2.550	936	286
Chiffre réel	2.813	1.356	816

La concordance est donc meilleure avec les chiffres ajustés, ceux-ci ne subissent pas l'influence du nombre rond.

Nous remarquerons que l'indice d'inégalité pour ces répartitions est de 20,2 pour le coton; 16,8 pour le bâtiment, 16,9 pour les chemins de fer. L'inégalité est donc beaucoup plus faible pour les salaires que pour les revenus, résultat important que nous retrouverons.

Les trois courbes de la figure VIII serpentent autour des droites que l'on peut ajuster. Le hasard ou quelque raison profonde guide-t-elle leur inflexion ? Pour deux des courbes, la première concavité est dirigée vers le haut, pour la troisième vers le bas. Peut-être l'existence de plusieurs catégories bien tranchées, spécialistes et « unskilled » pourrait expliquer ces déviations ? Nous n'en savons rien.

Nous allons étudier sans délai, au moyen de l'indice, l'influence de la spécialité professionnelle, de la nature de l'industrie, de l'âge de l'ouvrier, etc..., sur l'inégalité du salaire correspondant.

1. Problème du « smoothing ». La formule de Woolhouse revient à faire passer un fragment de courbe régulière parmi les points observés. On la trouvera par ex. dans l'ouvrage de Jordan, *Statistique mathématique*, p. 209.

Les modes de la répartition calculés par les formules que nous démontrons en annexe sont respectivement 25,0; 31,6 et 23,1. Ils correspondent bien aux principaux modes observés.

1° *La spécialité professionnelle.*

§ 41. Comme nous l'avons déjà indiqué, nous utilisons les calculs de M. de Bernonville dans son article du *B. S. G. F.*, 2, p. 400. Il mesurait l'inégalité de deux manières différentes, rapport des quartiles ou différence relative des quartiles. De là on peut déduire, comme nous le montrons en annexe, deux valeurs théoriquement égales

Tableau XLI. — **Salaires** (Royaume-Uni : 1906)

F. Nombre d'ouvriers observés. — M. Médiane en shillings des salaires hebdomadaires. C₁ rapport des quartiles ; C₂ différence relative des quartiles.

PROFESSIONS 1	N 2	M 3	C ₁ 4	C ₂ 5
<i>Bâtiment.</i>				
Ouvriers non qualifiés	2.897	24,2	12,2	12,3
Aides maçons	2.256	24,2	7,0	6,9
Garçons briqueteurs	4.316	24,7	10,5	10,0
Garçons plâtriers	1.194	25,2	8,5	8,2
Terrassiers	1.366	25,2	7,5	7,3
Peintres et décorateurs	6.255	35,3	7,4	7,3
Plombiers	2.656	37,3	7,1	6,8
Charpentiers menuisiers	9.768	37,3	8,9	8,6
Maçons	3.824	37,8	4,2	4,1
Briqueteurs	3.633	38,8	8,4	8,2
Plâtriers	1.648	38,8	7,7	7,8
Chefs de chantiers.....	3.215	45,2	10,2	10,4
<i>Constructions mécaniques.</i>				
<i>Grosse chaudronnerie.</i>				
Ouvriers non qualifiés	15.853	20,2	10,2	9,1
Frappeurs	2.346	22,1	8,4	8,2
Conducteurs de machines	1.691	26,0	11,1	10,9
Mécaniciens, perceurs, raboteurs	6.024	26,6	13,7	13,7
Menuisiers	1.732	34,2	10,2	10,0
Forgerons	2.238	35,3	8,7	8,7
Tourneurs sur métaux	5.216	35,3	5,8	5,0
Ajusteurs, monteurs	14.176	35,7	6,7	6,4
Riveurs, mateurs	1.482	37,8	4,4	4,1
Mouleurs	6.316	38,7	6,0	5,9
Modeleurs	2.409	38,7	6,0	5,9
Contremaîtres	5.016	50,4	14,2	14,5

de notre indice d'inégalité. Ces valeurs, que nous désignons par C_1 et par C_2 , sont inscrites dans les colonnes 4 et 5 du tableau XLI. La faible divergence des deux valeurs est une présomption très forte de la bonne application de la loi de l'effet proportionnel¹. Les répartitions utilisées sont celles de l'enquête du Board of Trade de 1906. On n'aperçoit pas de loi générale, les ouvriers qualifiés et les chefs ou contremaîtres ont les plus fortes inégalités, ce qui se comprend bien. L'inégalité de l'intelligence vient s'ajouter nettement à celle des qualités physiques. Mais pourquoi maçons et riveurs ont-ils des inégalités aussi faibles ? Est-ce la nature de la spécialité ou l'homogénéité plus grande de leur groupe ? En tout cas, on ne retrouve pas la stabilité qu'avait cru voir M. March², pour l'inégalité des salaires, puisqu'à l'intérieur du groupe bâtiment, par exemple, elle varie du simple au triple, on n'aperçoit aucune relation entre l'inégalité et la médiane.

2° *La nature de l'industrie.*

§ 42. Elargissons notre cadre et étudions l'inégalité dans les principales industries d'un pays. Nous nous bornerons aux répartitions étudiées par M. de Bernonville, dans le *B. S. G. F.* de 1913.

Le tableau XLII donne pour soixante-treize groupes industriels les valeurs de la médiane en fr. correspondant aux salaires journaliers et celles de l'indice calculées par les deux procédés précédents. Les indices ont, en gé-

1. De plus la formule qui donne C_2 à partir de la différence relative des quartiles est approchée par défaut. Or 18 sur les 24 valeurs calculées de C_1 sont plus petites que C_2 et pas une seule valeur de C_1 ne dépasse C_2 de plus de 0,3. Nous prenons C_1 en principe.

2. March, *J. S. S. P.* (juin et juillet 1898).

néral, des valeurs voisines pour une industrie déterminée, quel que soit le pays considéré; ainsi les *verreries*, le *cuir*, le *bâtiment* la *laine*. Mais il n'en est pas ainsi pour l'industrie des *chaussures* ou celle du *tabac*.

On peut cependant essayer de classer les industries d'après l'inégalité des salaires correspondants. On obtient le résultat suivant :

Inégalité très forte	Verreries.
— forte	Coton, fer, acier.
— moyenne	Laine, papier, houille, cuir.
— faible	Soie.

Nous ne cacherons pas que la raison d'un tel classement ne nous apparaît guère. Il semble probable, d'ailleurs, qu'une étude approfondie des conditions du travail dans les différentes industries et les différents pays que nous avons considérés, serait absolument nécessaire pour nous renseigner sur ce sujet. Il est superflu de montrer l'impossibilité de tenter ici cette étude. En tout cas, l'inégalité varie beaucoup ici encore, du simple au triple.

Le tableau nous permet encore de tenter de déterminer l'influence de diverses particularités. Treize fois sur vingt, l'inégalité est plus grande pour l'homme que pour la femme. (Ceci est particulièrement net pour le Massachussets.)

Par contre, il est impossible de relier l'inégalité à la nationalité.

Peut-on découvrir une tendance de l'inégalité à varier dans le temps ? Eliminons les salaires dans les mines de houille aux Etats-Unis, le nombre des ouvriers étant en 1902 50 fois plus fort qu'en 1890. Il reste 17 observations, dans 9, l'inégalité a augmenté d'une époque à l'autre, dans 4 cas, elle a diminué. Dans les quatre derniers, la varia-

			HOMMES				FEMMES			
			N	M	C ₁	C ₂	N	M	C ₁	C ₂
<i>Textiles.</i>										
Coton.	Royaume-Uni ..	1906	56.774	6,20	24,5	25,4	88.943	3,88	18,5	19,2
	Massachusetts ..	1908	48.472	8,84	20,5	20,8	38.609	6,93	17,9	17,2
	— ..	1898	48.652	7,42	20,3	20,4	33.732	5,63	17,9	17,7
	Belgique	1901	5.979	2,92	20,3	20,0	4.909	1,96	19,4	19,1
Laine.	— ..	1896	5.743	2,82	20,3	20,0	4.603	1,97	21,8	20,7
	Royaume-Uni ..	1906	24.050	5,64	17,8	18,2	44.001	2,73	17,1	17,2
	Massachusetts ..	1908	11.643	9,17	19,5	20,0	5.426	6,96	19,4	19,5
	— ..	1898	12.144	8,09	18,4	19,1	6.042	6,02	15,3	15,4
Soie	Belgique	1901	10.362	3,37	20,0	20,0	7.134	2,24	23,6	20,7
	— ..	1896	9.370	3,30	19,6	19,1	6.657	2,18	22,8	21,3
	Italie	1909	»	»	»	»	47.172	1,24	8,6	8,6
<i>Chaussures.</i>										
Royaume-Uni		1906	13.621	5,98	12,0	11,8	6.275	2,73	15,8	15,9
Massachusetts		1908	49.619	12,02	25,8	25,9	23.800	8,12	22,8	22,8
—		1898	42.486	10,03	24,0	22,3	18.903	6,90	23,2	22,8
<i>Fabriques de papier.</i>										
Royaume-Uni		1906	6.493	5,25	20,6	21,8	3.551	2,41	15,3	15,9
Massachusetts		1908	8.306	9,58	16,8	17,3	3.842	5,77	10,4	10,5
—		1898	5.368	8,39	19,2	20,0	3.554	5,14	13,7	13,2
Belgique		1896	1.559	3,10	14,5	14,1	1.215	1,58	17,6	17,3
<i>Tabacs.</i>										
Royaume-Uni		1906	3.605	5,98	17,3	17,7	8.053	2,41	21,9	21,7
Belgique		1896	3.527	2,69	22,7	22,8	1.219	1,60	19,0	19,1
France		1896	1.446	5,04	12,8	12,7	13.674	3,01	16,5	16,8

		HOMMES			
		N	M	C ₁	C ₁
<i>Fer et acier</i>					
Royaume-Uni	1906	39.211	6,88	23,8	24,2
Etat-Unis	1910	172.706	9,32	19,6	21,4
—	1890	12.878	7,13	16,8	17,7
Massachusetts	1908	38.106	10,22	24,7	25,0
France	1891-95	6.600	5,67	23,6	23,2
Belgique	1903	19.870	3,86	17,8	15,9
—	1896	19.761	3,41	18,3	18,6
<i>Mines de houille</i>					
Belgique	1900	72.000	4,65	21,6	20,8
—	1896	61.300	3,33	17,0	16,8
Allemagne	1896	165.430	4,73	17,7	17,7
Etat-Unis	1902	280.638	11,24	13,9	14,1
—	1890	6.552	8,13	20,6	20,0
<i>Ensemble de mines</i>					
Italie	1906	53.795	2,06	22,9	22,3
Etats-Unis	1902	581.728	10,88	20,7	18,6
<i>Bâtiments</i>					
Royaume-Uni	1906	50.836	7,14	16,9	16,8
Paris	1860	70.243	4,38	14,7	14,6
<i>Chemins de fer</i>					
Royaume-Uni	1907	365.901	4,83	13,7	13,2
France	1891-95	138.587	3,80	20,3	30,8
Etats-Unis	1890	213.173	6,90	16,4	16,4
Belgique	1896	4.137	2,56	16,2	16,4
<i>Services publics</i>					
Royaume-Uni	1906	165.242	5,67	16,5	16,8
Allemagne (33 villes)	1907	49.960	4,55	12,1	12,3
—	1902	35.279	3,95	10,9	10,9
<i>Cuir</i>					
Massachusetts	1908	10.623	9,37	18,2	18,7
—	1898	5.692	8,35	15,3	15,5
Belgique	1896	2.671	2,85	17,0	17,7
<i>Verreries</i>					
Royaume-Uni	1906	3.421	7,56	28,9	28,2
Belgique	1896	9.149	3,84	24,8	27,7

tion est inférieure à 0,4; elle est à la limite de précision de nos calculs, nous la considérons au moins comme douteuse. On peut donc indiquer, sous toutes réserves, une faible tendance à l'augmentation. Il y a peu de documents récents et les périodiques statistiques donnent rarement des renseignements sur ce sujet. Cependant le *Journal de la S. S. P.* (1920, p. 51) fournit les données suivantes relatives à 30 établissements des industries précédentes pour les Etats-Unis fin 1918 - début 1919 (salaires horaires).

Hommes	N = 318.946	M = 53,1	Cents	C = 23,3
Femmes	N = 85.812	M = 30,6	"	C = 23,1

Or, le rapport Dewey du 12^e Census donnait pour les hommes :

En 1890...	N = 104.923	C = 25,9
" 1890...	N = 160.065	C = 25,0

On constaterait donc une diminution de l'inégalité. La question reste ouverte.

3^o L'âge de l'ouvrier.

§ 43. Le tableau XLIII donne pour différents groupes d'âges donnés, les caractéristiques de distributions de salaires (nombre d'ouvriers observés, médiane de leurs salaires et indice d'inégalité de la répartition correspondante). Voici les sources utilisées : L'Office du travail italien a fait connaître la répartition d'après le montant du salaire journalier des ouvriers occupés en février 1906 dans l'ensemble des mines; le recensement danois de 1906 donne la répartition analogue pour le salaire hebdomadaire des ouvriers des constructions mécaniques; enfin, le

Landtag de Bavière, à la suite de pétitions adressées par les associations de domestiques et gens de maison, a décidé de procéder à une enquête sur leur situation (nous donnons un salaire mensuel¹).

Tableau XLIII. — Salaires par groupes d'âge

N. Nombre d'ouvriers. — M. Médiane en lires, kroners, marks. — C. Inégalité,

ITALIE 1906				DANEMARK 1906				BAVIÈRE 1909			
AGE	N	M	C	AGE	N	M	C	AGE	N	M	C
jusqu'à 15	3.304	1,13	16,7	19 à 25..	1.373	21,3	14,9	jusqu'à 16	114	10,5	18,9
15 à 21..	11.888	1,55	20,8	26 à 30..	1.200	23,4	14,6	17 à 20..	544	17,6	15,2
21 à 30..	13.895	2,19	18,1	31 à 40..	1.671	24,5	15,5	21 à 25..	731	20,6	12,1
30 à 40..	11.326	2,33	17,1	41 à 60..	1.601	23,8	15,6	26 à 30..	439	23,7	13,4
40 à 50..	8.094	2,43	19,1	61 et plus	215	19,8	15,3	31 à 35..	244	25,4	13,3
50 à 60..	4.048	2,38	20,9					36 à 40..	140	25,1	13,1
60 et plus	1.240	2,23	22,1					41 et plus	194	24,4	19
Total ..	53.795	2,03	24,1		6.060	23,3	15,9		2.530	20,1	19,7

Pour la Bavière, le total indiqué est supérieur à la somme des groupes, le bureau de statistique de Munich avait constitué une catégorie d'âge inconnu.

On peut faire quelques remarques; le total présente toujours une inégalité plus grande que les parties qui sont en effet plus homogènes, la médiane varie avec l'âge conformément au bon sens. On trouve un maximum à 45 ans pour les hommes et à 32 pour les femmes (répartition de la Bavière).

La variation de l'inégalité avec l'âge est plus difficile à interpréter. Pour les mineurs et les domestiques, il existe une diminution de 20 à 35 ans, suivie d'une variation en sens inverse. Pour les ouvriers danois, au contraire, l'inégalité apparaît à peu près constante. Peut-être faut-il

1. B. S. G. F., tome 2, p. 430; t. 2, 432; t. 2, 271.

admettre que chez les premiers la décroissance (ou la croissance) des forces physiques, étale les salaires, donc augmente l'inégalité. Au contraire, pour les métiers de technique délicate (constructions mécaniques), les variations d'expérience compensent l'effet précédent.

4^o Conclusion.

§ 44. Les salaires suivent¹, répartis par grandeur, la loi de l'effet proportionnel. Leur inégalité est *beaucoup plus faible que celle des revenus étudiés jusqu'ici*. Elle varie beaucoup quand on diversifie les conditions particulières (spécialité ou groupe industriel). Cependant, il paraît exister souvent un lien entre les inégalités d'industries analogues dans des pays différents. Enfin le temps paraît peu influencer l'inégalité de répartition.

Section D. — Le revenu de l'entreprise.

§ 45. « L'observation du revenu de l'entreprise, en lui-même et dans ses rapports avec d'autres éléments, soit internes (capital investi), soit externes (mouvement des prix), se heurte à de nombreuses difficultés qui s'expliquent par des raisons économiques et extra-économiques .»

Cette déclaration de M. Perroux, dès le début du livre II de son ouvrage sur le profit², explique la rareté des do-

1. Les traitements des professions libérales n'échappent pas à la loi. M. W. Smart (*Distribution of income*, XXVII, p. 329), indique des répartitions de traitements des ministres de trois églises écossaises vers 1900. Les indices d'inégalité correspondant sont 25, 36 et 30. L'inégalité est de l'ordre de grandeur précédent.

2. Perroux, *Le problème du profit*. Livre II, titre 1^{er} : le problème d'observation.

cuments statistiques et la difficulté de leur interprétation. Nous ne nous occuperons, ici, que de l'étude de l'inégalité de répartition de ces profits, laissant systématiquement de côté tous les problèmes que pose la définition même du profit. Nous insisterons seulement sur son caractère *résiduel*, ramenant le profit à une grandeur comptable.

§ 46. Nous ne retiendrons des sources indiquées par M. Perroux, que les travaux de Van der Borgh et ceux de Dermietzel; seuls ils nous fournissent les chiffres suffisants pour une étude des répartitions.

Van der Borgh¹ divise les sociétés par actions en trois catégories, les sociétés bancaires et de crédit, les sociétés d'assurances et les sociétés industrielles.

Le tableau XLIV résume ses observations.

Tableau XLIV. — Pourcentages des sociétés donnant un dividende déterminé. (Allemagne)

Dividende %	1886	1896	% calculé	1886	1896
0 à 5 %	60,1	54,7		62,3	53,0
5 à 10 %	26,8	30,2		23,3	32,8
10 à 15 %	6,8	10,1		7,8	9,2
15 à 20 %	2,6	2,9		3,1	3,0
20 à 30 %	2,2	1,2		2,3	1,5
30 à 40 %	0,9	0,4		0,7	0,3
40 et plus	0,6	0,4		0,5	0,2

En 1886, il y avait 1865 sociétés étudiées appartenant à l'ensemble des trois classes; en 1896, 2.374, appartenant seulement à la troisième classe (différence négligeable). La loi de l'effet proportionnel s'applique dans une mesure

1. Article « Aktiengesellschaften » dans le *Dictionnaire d'économie politique* 1898, p. 191.

très suffisante pour permettre l'emploi de notre indice. La figure IX montre l'alignement des points correspondants et les deux dernières colonnes du tableau XLIV donnent les résultats du calcul. Voici les formules utilisées (à 2 paramètres) :

$$z = 1,76 \log x - 1,01 \quad \text{pour 1886 indice 57}$$

$$z = 2,31 \log x - 1,56 \quad \text{pour 1896 indice 43}$$

L'indice d'inégalité a donc baissé pendant les dix années. C'est ce qu'indiquait M. Perroux avec beaucoup d'intuition (il utilise la méthode de comparaison des pourcentages fort trompeuse comme nous l'avons vu), il écrit en effet : « Du tableau, il résulte : 1° que pour 1896, la proportion des sociétés qui donnent les dividendes les plus élevés a baissé; 2° que, cependant, la répartition des sociétés, dans les différentes classes conserve pour ces deux dates une allure commune. »

M. Perroux indique que 1886 est dans une phase de dépression économique et 1896 une année de grande prospérité. Cependant la différence des états économiques n'est peut-être pas aussi tranchée. Si nous en croyons M. Lescure¹, 1886 est le début d'une période d'essor, le nombre des sociétés et leur capital sont en progression rapide à cette époque, l'industrie du fer se constitue, les chemins de fer se développent. La période de dépression est, soit vers 1883, soit en 1890 (crise Baring). En 1896, il semble qu'il y ait début d'une prospérité qui croîtra jusqu'à la crise de 1900.

En résumé, ces deux années sont au début de périodes d'essor et on ne peut donc relier l'inégalité des profits au mouvement cyclique.

1. Lescure, Crises générales et périodiques de surproduction

§ 47. *Dermietzel*¹ se borne aux sociétés de capital au moins égal à 10 millions de Mks et élimine les compagnies ferroviaires. Il caractérise comme van der Borgh^t le profit par le dividende. Nous ne le suivrons pas dans sa détermination du taux *habituel* ou *prédominant* du profit. Mais nous utiliserons un tableau reproduit dans les « *Crises périodiques et générales de surproduction* » de M. Lescure (p. 358). Il donne pour la période 1890-1902 le pourcentage du *capital action allemand* recevant différents dividendes, ce qui permet de calculer un indice d'inégalité des profits².

Il nous a paru intéressant de relever, pour la même période, l'indice général des prix (indice Sauerbeck), indice assez caractéristique du mouvement général des affaires.

Tableau XLV
Profits. Mouvement cyclique

Année	Indices	
	d'Inégalité	des prix
1890	24	72
1891	28,5	72
1892	26,5	68
1893	22,5	68
1894	20,5	63
1895	21,5	62
1896	21	61
1897	19,5	62
1898	22,5	64
1899	24,5	68
1900	23,5	75
1901	32,5	70
1902	30,5	69

1. Statistische Untersuchungen über die Kapitalrente der grösseren deutschen Aktiengesellschaften von 1876-1902. Göttingen 1906.

2. La signification de celui-ci est légèrement différente de celle de l'indice de van der Borgh^t, puisqu'il s'agit du pourcentage du capital et non du pourcentage des sociétés. Cette nouvelle signification est évidemment préférable.

Les dividendes d'une année correspondent aux profits de l'année précédente, il faut donc les comparer aux prix de l'année précédente. L'indice Sauerbeck, en 1889, était égal à 72. La figure X, permet la comparaison des variations des deux indices. On voit qu'il y a simultanément. Les variations de l'inégalité des dividendes sont très importantes par rapport à celles de l'indice des prix. (De 1890 à 1896, le rapport maximum-minimum est pour l'inégalité 132; pour les prix, 115; de 1896 à 1900 les rapports sont 167 et 123.)

L'essor augmente l'inégalité des profits, la dépression la diminue. C'est ce que nous avons déjà constaté pour l'inégalité des revenus en France, de 1919 à 1927. La coïncidence donne à réfléchir. M. Perroux avait cru le contraire, nous avons vu pourquoi.

§ 48. Ce résultat se rattache à l'explication des crises par les variations du profit possible. Au terme d'une période d'essor, les coûts d'établissement; les prix de revient ont haussé tellement que le prix de vente souvent prédéterminé, ne permet plus le profit. Mais il y a plus, l'inégalité varie et, ici, dans de larges proportions. Doit-on en accuser ce que l'on appelle, aujourd'hui, « la politique des dividendes » que les grosses sociétés suivent surtout ? On voit tout l'intérêt d'une enquête conduite avec soin sur ces sujets. Nous devons nous borner à cette indication.

Statistiques fiscales.

§ 49. Il y a des impôts qui portent sur les profits. Il est intéressant d'étudier au moins quelques statistiques fiscales, elles permettront un contrôle, si faible soit-il, des résultats précédents.

Un rapport de M. Coates, concernant l'incidence de l'*Income Tax*, étudie un certain nombre d'entreprises au point de vue de la répartition du chiffre total des affaires, d'après le bénéfice. Nous manquons totalement de renseignements sur ce que le rapporteur entend par bénéfice, aussi indiquerons-nous seulement que les indices d'inégalité obtenus à partir des quartiles ont l'ordre de grandeur des indices précédents¹.

On pourrait être tenté de rapprocher des statistiques de profits, les documents communiqués à Kiaer par M. de Vargha (*B. I. I. S.*, XIX, 2, 146) relatifs à la Hongrie, pour les années 1902 et 1903. Un impôt sur le revenu est payé dans ce pays par tous ceux qui exercent quelque commerce rapportant un bénéfice ou, ceux qui ont quelque profession intellectuelle ou artistique non rétribuée mensuellement ou annuellement (avocats, ingénieurs, médecins). Les statistiques de cet impôt donnent la répartition des revenus par classe, par exemple : industrie métallurgique, poterie, industrie alimentaire, etc... On obtient ainsi des indices très élevés rappelant ceux des revenus, ce qui nous montre, mieux que tout raisonnement, l'impossibilité de les faire servir à l'étude de l'inégalité des profits. Le mélange avec les revenus du travail est trop apparent.

§ 50. Il en est de même pour les statistiques fiscales françaises. L'impôt sur les *bénéfices industriels et commerciaux* conduit à un indice de 86 pour 1927, celui sur les charges et offices à un indice de 62. Ces deux répartitions suivent très bien la loi de l'effet proportionnel comme le

1. *Bulletin S. G. F.*, XVIII, p. 293. Voici des indices : industrie du coton, 27, laine 28, fer et acier 44, alimentation 37 (1912-13).

lecteur pourra s'en rendre compte¹ en reportant sur une feuille de papier quadrillée les valeurs de $\log x$ (colonne 3) en abscisse et celles de z en ordonnées (col. 4).

Tableau XLVI. — Bénéfices industriels et commerciaux (1927)

Bénéfice x	Nombre d'imposés	$\log x$	z
0 à 800 fr.	195.320	»	»
800 à 1.500	164.136	2,903	— 0,791
1.500 à 3.000	215.546	3,176	— 0,481
3.000 à 5.000	233.112	3,477	— 0,190
5.000 à 7.000	144.012	3,649	+ 0,054
7.000 à 10.000	148.316	3,845	0,231
10.000 à 15.000	138.973	4,000	0,429
15.000 à 20.000	79.263	4,176	0,651
20.000 à 25.000	46.486	4,301	0,811
25.000 à 30.000	28.836	4,398	0,931
30.000 à 35.000	20.089	4,477	1,018
35.000 à 40.000	14.411	4,544	1,091
40.000 à 45.000	10.942	4,602	1,153
45.000 à 50.000	9.657	4,653	1,205
au-dessus de 50.0000	56.014	4,699	1,257

Il trouvera 14 points en ligne droite et sera ainsi convaincu de l'intérêt de la loi de l'effet proportionnel. La répartition des 1.465.113 industriels et commerçants d'après leur chiffre d'affaires se fera par une formule à 2 paramètres.

Conclusion.

§ 51. Cette étude, obligatoirement rapide des profits, nous a montré surtout l'existence d'un lien entre l'inégalité de leur répartition et le mouvement général des prix. Cette relation n'a pu, il est nécessaire de le reconnaître, être mise en évidence que le jour où on a disposé d'un moyen rapide et sûr de mesurer l'inégalité.

Il nous resterait maintenant à tirer les conclusions de l'ensemble de ce chapitre. Nous le ferons dans le chapitre qui suit.

1. *Bulletin de législation comparée*, septembre 1929.

CHAPITRE I I

RESULTATS ET CONSEQUENCES

1° La dissémination de la fortune et du revenu.

§ 1. L'étude des données statistiques nous permet d'affirmer que quelle que soit l'époque, quel que soit le pays, les revenus et la fortune privés possèdent un indice d'inégalité voisin de 100. C'est là le nombre autour duquel oscillent les chiffres des tableaux XXII et XXXV.

Pratiquement, à quoi correspond cette inégalité de 100 ? Voici quelques chiffres qui répondent à cette question.

Nous prendrons comme unité le revenu *médian* et nous rapporterons tous les revenus à x_0 comme origine¹.

Le revenu *moyen* a pour grandeur 3,76 ; le *mode* au maximum de la courbe de répartition, 0, 07. (On voit pourquoi on ne peut observer la tangente horizontale dans les courbes de répartition et pourquoi la formule de Pareto sans mode est cependant bonne.) Les *quartiles* correspondent à 0,33 et à 3,00. En d'autres termes, un quart des individus possède *moins du tiers* du revenu *médian* et *moins du douzième du revenu moyen*. L'inégalité est donc très sensible.

20, 8 %, à peine un *cinquième* des individus seulement

1. Cela revient à remplacer dans toutes les formules $x - x_0$ par x' . Le calcul des nombres que nous allons citer se ferait au moyen des formules de l'Annexe 1 (§ 3 à 6).

dépasse le revenu moyen, 24,9 %, le *tiers* dépasse la moitié du revenu moyen; 10,7 %, le *dixième*, le double du revenu moyen.

Sur un million d'individus, 25.700 ont un revenu plus grand que le quintuple du revenu moyen, 12.950 dépassent le décuple, 140 le centuple et enfin *deux seulement* atteignent un revenu cinq cent fois plus grand que le revenu moyen. La décroissance est donc plus rapide.

En nous tournant maintenant vers le total des revenus, nous voyons que 5,19 % des individus (un vingtième) se partagent la *moitié de la fortune totale*. Le quart de celle-ci est possédé par les 1,07 % les plus riches ou par les 81,7 % les plus pauvres.

Sur un million d'individus, les mille plus riches possèdent à eux seuls 5,5 % de la fortune totale, or la seconde moitié de la population n'en a que 5,2.

Nous avons peut-être trop longuement insisté sur ces chiffres, mais seule leur répétition peut donner une idée de l'inégalité révélée par les statistiques de l'impôt¹. Cependant avant d'en tirer des conclusions sociales, il paraît bon de méditer cette phrase de W. Smart : « il est incontestable que beaucoup de gens riches reçoivent plus qu'ils ne le méritent, mais il semble qu'on a négligé de rechercher si des gens, même très pauvres, ne reçoivent pas aussi plus qu'ils ne méritent² ».

Comme conclusion, il nous paraît difficile d'admettre

1. Pour les salaires, l'inégalité est beaucoup moins grande : on peut faire semble-t-il, en moyenne l'indice égal à 20. On trouve que le revenu moyen vaut 1,055 fois la médiane, le mode 0,90 (la relation $2A + M_0 = 3M$ est satisfaite). Les quartiles sont 0,80 et 1,24. Sur mille individus, onze dépassent le double du revenu moyen et la moitié du total des salaires se répartit sur les 37,2 % les plus favorisés.

2. W. Smart, *La répartition du revenu national*, préface, p. 4.

sans restriction cette affirmation de Y. Guyot¹ : « La caractéristique de la fortune privée de la France est sa dissémination. »

2° Les variations de l'inégalité des biens dans le temps.

§ 2. Dans son mémoire de 1914², Kiaer indiquait (question n° 10) : « Un problème social des plus importants, dont la solution ne saurait être trouvée qu'à l'aide d'une bonne statistique des revenus et des fortunes, est celui-ci : Le progrès économique tend-il à amasser des richesses chez une minorité ou tend-il à améliorer les revenus de toutes les classes de la société ? »

Il faut, en effet, une bonne statistique, et peut-être est-il encore prématuré de conclure; on peut en tout cas donner des indications précises. On a tout écrit sur ce sujet « Les riches deviennent chaque jour plus riches et les pauvres chaque jour plus pauvres », voit-on souvent. Par contre Leroy-Beaulieu, dans son célèbre ouvrage sur la répartitions des richesses³ conclut : « L'écart entre les fortunes et surtout les revenus est moindre qu'on ne le pense et cet écart va en s'amointrissant. »

La formule de Pareto a donné lieu à des interprétations dont le moins qu'on puisse dire, est qu'elles sont surprenantes. Ainsi, M. de Foville⁴ : « Faut-il en conclure que

1. Y. Guyot, « Evaluation de la fortune privée en France d'après les revenus fiscaux » (*B. I. I. S.*, XIV, 3, 107).

2. La répartition des revenus et fortunes privés (*B. I. I. S.*, XX, 2, 619).

3. Ecrit en 1881; malheureusement, comme le dit M. Seailles, « la bonne foi scientifique de M. Leroy-Beaulieu ne saurait être suspectée, mais il n'est pas défendu de se demander si sa foi ardente dans l'incessante augmentation du bien-être des classes ouvrières n'a pas guidé son interprétation des faits vers une conclusion qu'il désirait. » Nous ajouterons que la seule méthode de cet auteur est celle des pourcentages, la valeur en est à peu près nulle.

4. *Revue économique internationale* : « La richesse en France », 1906, p. 7.

l'égalité est une chimère, qu'il y aura toujours plus d'indigents que de riches puisque la loi de Pareto est une *loi assez positive pour que l'on puisse lui donner une forme géométrique.* » M. de Foville oublie que la loi de Pareto peut, avec des paramètres convenables, représenter telle inégalité que l'on voudra. Enfin, on peut, avec M. Séailles, admettre « qu'il n'est nullement certain que la même équation soit applicable à toutes les formes de répartition passées, ni surtout qu'elle doive nécessairement dominer les modes de répartitions dans l'avenir¹ ».

§ 3. Pareto, le premier, a donné une solution scientifique du problème, en calculant son coefficient d'inégalité, pour un certain nombre de pays à différentes époques. α varie peu, ce qui lui permet d'écrire² : « L'expérience nous a révélé un fait assez singulier, c'est ce que la courbe de répartition des revenus varie peu en moyenne, soit dans l'espace, soit dans le temps pour les peuples civilisés sur lesquels la statistique nous fournit des renseignements. »

§ 4. Schmoller, en 1905, arrivait, malgré une méthode de pourcentages, à la conclusion suivante après une étude très importante sur le moyen âge³ : « Il ne s'agit pas d'une inégalité toujours croissante du revenu, mais de variations dans le temps, dues à des mouvements contraires...⁴ »

1. *Thèse*, p. 85.

2. *Cours d'Economie politique*, résumé général, tome 2, p. 408. Son premier article sur la courbe de répartition est à notre connaissance celui qu'il a publié en 1896 (le cours est de 1897) dans l'Université de Lausanne, recueil publié par la Faculté de Droit à l'occasion de l'Exposition nationale suisse. Il est reproduit en appendice dans la thèse de M. Séailles.

3. « Die einkommensverteilung in alter und neuer Zeit (*B. I. I. S.*, IX, p. 1-22).

4. Nous ne devons pas oublier l'optimisme vraiment frappant de M. Mourre (*J. S. S. P.*, 1922, p. 215) : « Mais quel que soit le sens de la mar-

§ 5. Il semble que l'on doive distinguer, en effet, les mouvements de longue durée et les mouvements cycliques.

Les tableaux XXII et XXXV du chapitre précédent, permettent d'affirmer l'absence d'un mouvement sensible de longue durée. Les exemples relatifs à Bâle au moyen âge sont frappants, il paraît inutile d'y revenir.

Dans l'état actuel de la technique statistique il est impossible d'admettre que l'inégalité des fortunes ou celle des revenus présentent une tendance vers une augmentation ou une diminution.

L'existence d'un mouvement cyclique est plus discutable. Nous avons vu qu'en France et aux Pays-Bas on pouvait constater une liaison avec les phénomènes de crise. De plus l'étude des profits corrobore nettement cette hypothèse. Il ne faut pas oublier, cependant, que l'observation de ces mouvements est à la limite de la précision sur laquelle nous pouvons compter. Il faut donc rester prudent.

3° Les théorèmes de Pareto.

§ 6. « C'est l'induction qui nous a fait connaître la forme de la courbe des revenus; c'est la déduction qui va nous per-

che vers le nivellement ou l'inverse, elle aboutira à une constitution harmonieuse de la société. Ni une armée où il n'y aurait que des soldats, ni une armée où il n'y aurait que des généraux ne pourraient aller au combat. La société est construite pour évoluer et elle marche vers un but mystérieux que nous ignorons. Pour l'atteindre, elle est, et doit rester hiérarchisée. »

Par contre, M. Mourre rejette la stagnation : « La société ne peut se développer au point de vue de la répartition des revenus dans une forme semblable à elle-même. Qu'elle soit en progression ou en décadence, sa structure future ne sera jamais celle du passé... Sans doute la valeur de α (Pareto) peut être identique pour deux courbes représentatives du nombre, mais il s'agit de deux sociétés différentes et non d'une même société ayant évolué dans le temps. » Ceci est démenti par les faits.

mettre d'en tirer deux théorèmes fort importants », nous annonce Pareto, dans le résumé général de son *Cours*.

Voici ces deux célèbres théorèmes :

a) La répartition des revenus n'est pas l'effet du hasard.

b) Paur relever le niveau minimum ou pour diminuer l'inégalité des revenus, il faut que la richesse croisse plus vite que la population.

La « déduction » du premier consiste dans la remarque que la formule de Pareto ne ressemble pas à la courbe, en cloche, de Gauss. Ceci ne prouve rien et Pareto lui-même semble s'en être aperçu puisque quelques lignes plus loin¹, il déclare : « Nous avons vu que la répartition des revenus ne dépendait pas *seulement* du hasard. » Nous reprendrons cette question un peu plus loin, en recherchant les causes de la répartition des revenus.

Le second théorème n'existe plus dans l'hypothèse de la loi de l'effet proportionnel. En effet, on peut prendre comme paramètres *indépendants*, x_0 , revenu minimum, α inverse de l'inégalité et A moyenne des revenus.

Au contraire, dans la formule de Pareto, il n'y a que deux paramètres indépendants et, par suite, il existe une relation entre x_0 , α et A.

Il ne faut donc pas attribuer une valeur mathématique et obligatoire aux « théorèmes de Pareto ».

§ 7. M. le baron Mourre a poussé beaucoup plus loin l'emploi de la formule $\frac{A}{\alpha\alpha}$ et a cherché à écraser les thèses socialistes sous des arguments mathématiques.

Ainsi « partons toujours, quelle que soit l'année choisie, du même revenu minimum. Si α diminue, le nombre des

1. *Cours*, tome 2, p. 416.

individus soumis à la loi de Pareto s'accroît aux dépens de la zone pauvre, la solidarité sociale n'est pas limitée aux contribuables, toutes les classes sociales sont liées dans la prospérité et la misère... Nous soulignons l'importance de ces conclusions. Une des thèses les plus chères aux socialistes est l'antagonisme des classes. On n'avait pu, jusqu'ici, lui opposer aucune réfutation scientifique, on se bornait à des arguments de fait, parfois contestables. L'emploi que nous venons de faire de la formule de Pareto, ruine une des parties fondamentales de la doctrine¹. »

Nous doutons fort que Pareto eut approuvé une semblable « démonstration ».

4^o Les causes de la répartition.

§ 8. Comme l'a fort bien écrit Pareto, « la répartition de la richesse peut dépendre de la nature des hommes dont se compose la société, de l'organisation de celle-ci et aussi du hasard (les conjonctures de Lasalle), c'est-à-dire de cet ensemble de causes inconnues agissant tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, auxquelles, dans notre ignorance de leur vraie nature, nous donnons le nom de hasard. C'est à l'observation de nous renseigner sur la part qu'ont réellement ces causes dans la répartition de la richesse². »

1. « La courbe des revenus ». (*J. S. S. P.*, 1929, p. 285). M. Mourre écrit aussi : « Les socialistes déclarent : « le remède à la production somptuaire inutile et à un dénuement serait le nivellement des fortunes. La formule de Pareto nous permet de détruire le second pilier de la doctrine socialiste » et plus loin il croit déduire de la formule : « le machinisme, le taylorisme, la rationalisation augmentent les gains des capitalistes et le salaire réel des ouvriers. Les capitalistes obtiennent une part proportionnellement plus large des nouvelles acquisitions sociales que les classes ouvrières. »

Quelles singulières vertus doit posséder une formule d'*ajustement* pour donner de semblables résultats ?

2. Pareto, *Cours*, n^o 957.

Nous avons déjà vu que, au moins dans le cours de son ouvrage, Pareto éliminait le hasard sous le prétexte que sa formule différait de la formule de Gauss. Démonstration sans valeur, car le « hasard » peut donner naissance à des répartitions très différentes de celle de la courbe en cloche. Les répartitions *normales* sont l'exception.

Pareto se contredisait d'ailleurs dans la suite, en recherchant comment il fallait lier les capacités intellectuelles ou physiques de l'homme à son revenu, pour obtenir la courbe de répartition. En effet, on a toujours admis pour la répartition des facultés une courbe en cloche ou à peu près¹.

Or, Pareto obtenait ainsi une relation mathématique compliquée².

§ 9. La loi de l'effet proportionnel s'interprète, au contraire, immédiatement. Il suffit de considérer, comme nous l'avons montré longuement dans le chapitre VI de la première partie, le logarithme du revenu, comme quantité élémentaire.

On peut alors énoncer que tout se passe comme si le logarithme du revenu³ d'un individu était proportionnel à ses aptitudes. Mais ceci suppose que, seule, l'aptitude

1. Pareto, « Appendice ». Vcyez aussi dans le *Profil* de M. Perroux, p. 505, « L'observation courante et les travaux scientifiques établissent qu'une répartition très analogue des aptitudes se retrouve dans les sociétés contemporaines. » Henry dans *Mesure des capacités intellectuelles et énergétiques* suggère que : « l'intelligence étant une quantité élémentaire, les mesures de l'intelligence devront se conformer dans leur répartition statistique à la loi binômiale. » M. le docteur Wallon dans ses *Principes de psychologie appliquée*, montre (p. 102) que la courbe des tests est une courbe en cloche, etc.

2. Il ne faut pas oublier que l'on peut toujours trouver un changement de variable tel que la courbe en cloche devienne une courbe quelconque donnée à l'avance.

3. Plus exactement de logarithme de l'écart du revenu avec le revenu minimum.

intervient dans la détermination du revenu, ce que personne ne voudra admettre.

Rappelons-nous « l'ensemble des causes inconnues agissant tantôt dans un sens, tantôt dans un autre », en un mot les « conjonctures » de Lassalle. L'aptitude est peut-être la plus importante; mais qu'importe, n'est-elle pas distribuée au hasard, puisque sa répartition est la courbe en cloche ?

On voit que la loi de l'effet proportionnel traduit de façon vraiment harmonieuse le fait que de nombreuses causes toutes dépendant du hasard, influencent le revenu.

De plus elle nous apprend comment le logarithme du revenu, dépend directement de ce « hasard¹ ».

1. Nous avons séparé nettement l'interprétation de la loi de l'effet proportionnel de son utilisation, nous avons observé, en effet, les difficultés très fortes que cette interprétation présentait pour les économistes sans formation mathématique. Nous remarquerons encore une fois que les deux choses sont indépendantes.

TROISIÈME PARTIE

LA RÉPARTITION DES HOMMES ENTRE LES ENTREPRISES

Ici comme ailleurs, il ne faut pas trop demander à la statistique et à ses techniques nouvelles. Elle fournit des faits et des mesures précieuses par leur précision et leur objectivité. Mais l'interprétation reste toujours du domaine de la science particulière qui fait usage des procédés statistiques.

(AFTALION, *observation au sujet d'une communication de M. March.*)

SOMMAIRE DE LA TROISIEME PARTIE

CHAPITRE I. — *Comment définir et comment étudier la concentration ?*

Grande et petite industrie.

La « concentration », sens statique et sens dynamique : (MM. March, Perreau). Les définitions successives de M. Ansiaux : la moyenne, le mode, l'écart quadratique et la dispersion des quartiles.

La concentration est liée à la façon dont se répartit également ou inégalement la masse des salariés entre les entreprises existantes.

Les procédés utilisés par les économistes, la méthode des pourcentages : exemple : concentration en Allemagne de 1882 à 1907.

CHAPITRE II. — *Recensements industriels et concentration.*

1° L'unité de recensement est-elle l'entreprise ? Il faut distinguer exploitation et profession. La seconde implique l'idée d'apprentissage, la première non. L'entreprise est un complexe des deux, Seul l'établissement sera recensable. (I. M. du 13-2-96). La collectivité-type à l'étranger, en Allemagne, en Autriche, en Belgique, en Suisse, aux Etats-Unis.

2° La mesure de l'importance : on ne connaît que le nombre des personnes du moins en France. Doit-on renoncer à la définition de la concentration ? Non, un critère relatif est suffisant en première approximation.

3° La classification des industries : les méthodes de la S. G. F. et ses divers numérotages, les comparaisons internationales.

4° La grande et la petite industrie, constitue une division inutilisable à l'heure actuelle d'une manière précise.

CHAPITRE III. — *L'étude des données statistiques.*

1° *La concentration en France de 1896 à 1921* : Le recensement de 1911 est inutilisable, car il porte sur les professions individuelles. De 1896 à 1921, la répartition de

la population active par grands groupes professionnels a, en somme, peu varié.

a) *Grandes sections professionnelles* : La concentration marque une augmentation nette pour le commerce, légère pour l'agriculture, imperceptible pour l'industrie et les transports.

b) *L'étude détaillée des principales divisions* : L'approximation de la loi de l'effet proportionnel est très suffisante pour justifier l'emploi de l'indice qui en dérive. D'un copieux tableau résulte que la population active a, en général, augmenté d'environ un quart pour les sections 3, 4, 6 (industries extractives, de transformation et commerce). Le nombre d'établissements a peu varié, mais le personnel moyen par établissement a presque toujours augmenté. L'indice de concentration ne marque pas de mouvement d'ensemble, il ne paraît pas dépendre du personnel moyen ; peut-être est-il en corrélation avec le nombre des entreprises ou le personnel total. Un classement des divisions suivant la valeur de l'indice de concentration ne paraît pas très explicable.

2° *La reconstitution des régions libérées* : Conclusions de M. de Ville-Chabrolle. Les résultats d'un tableau qui résume nos calculs sont les suivants : population active décroissante, diminution du nombre des établissements, indice de concentration décroissant sous l'influence de la reconstitution pour les industries à fort capital fixe et à gros outillage, mouvement inverse pour les autres.

3° *L'Alsace-Lorraine avant et après la guerre* : La comparaison est difficile, cependant il ne semble pas que l'on puisse attribuer les changements dans les répartitions au retour à la France.

4° *La concentration dans différents pays du monde* : La comparaison des répartitions dans divers pays aux environs de 1907 semble montrer que pour des industries semblables, la concentration est indépendante de la nationalité. L'étude de statistiques récentes (Turquie, Chine, Allemagne), confirme cette hypothèse.

5° *Conclusion* : L'indice d'inégalité de la loi de l'effet proportionnel a permis d'étudier facilement des problèmes très compliqués, il a permis d'obtenir des résultats nouveaux.

TROISIEME PARTIE

LA REPARTITION DES HOMMES ENTRE LES ENTREPRISES

Cette partie comprendra trois chapitres.

Dans le premier, nous montrerons comment on peut définir et étudier la concentration.

Nous verrons ensuite dans le deuxième, les difficultés très particulières que l'on rencontre lorsqu'on veut définir les collectivités-types de recensement et comment les différents choix, faits par les Etats, rendent difficiles les comparaisons internationales.

Dans le troisième, nous étudierons un certain nombre de problèmes touchant la concentration des entreprises, afin de mettre en évidence les corrélations entre les différentes observations statistiques; personnel total ou moyen des entreprises, nombre de celles-ci et concentration.

CHAPITRE PREMIER

COMMENT DEFINIR ET COMMENT ETUDIER LA CONCENTRATION

§ 1. L'un des phénomènes d'évolution économique les plus importants par leurs caractères et par leurs conséquences est peut-être la transformation qui s'est opérée de la petite à la grande industrie. Mais comment les distinguer ?

Dans certaines branches d'industries, on ne rencontre que de petits établissements; dans d'autres que des grands. C'est le cas, d'une part, des petits commerces par exemple, d'autre part, des mines de houille. La distinction est alors facile.

Mais il n'en est pas généralement ainsi. La distinction ne peut alors résulter que de la répartition des établissements d'après leur importance. On voit donc s'introduire un classement des entreprises par catégories et une suite de chiffres tout à fait semblable à celles que nous avons étudiées dans les pages qui précèdent.

Les économistes parlent de *concentration* des entreprises. Qu'est-ce à dire ? On ne trouve pas facilement dans leurs écrits une définition précise. Le sens même du mot varie : est-il statique ou dynamique ? S'applique-t-il à un état déterminé d'une industrie ou à son évolution ?

M. March, à qui nous devons la seule définition scienti-

fique du mot, adopte le sens statique : pour lui, un indice de la concentration est le rapport du personnel utilisé dans les établissements de plus de 50 ouvriers au total des ouvriers¹.

M. Ansiaux, dans son célèbre *Traité*, est nettement dynamiste² : pour lui, la concentration est « *l'importance croissante des entreprises ou leur union plus ou moins intime dans une branche déterminée ou dans des branches connexes d'activité économique.* »

M. Perreau, dans son *Cours*, adopte aussi le sens dynamique : « Il y a concentration quand, dans la production totale, la part afférente aux grandes entreprises s'est accrue proportionnellement à celle qui revient à la petite production³. » Il n'y a pas, évidemment, de gros inconvénient à employer le mot sous ces deux sens, si le texte est, par ailleurs, très net. On pourra par exemple, dire : l'industrie est concentrée ou s'est concentrée.

§ 2. On se met facilement d'accord sur le sens général du mot, mais, dès qu'on l'utilise, les confusions se suivent sans arrêt.

Quand M. Ansiaux écrit : « Impression déconcertante au premier contact, même paradoxale ! Tout le monde parle de la concentration de l'industrie, du commerce, des

1. « La concentration dans les entreprises industrielles et commerciales », série de conférences par MM. A. Fontaine, March, de Rousiers, Samazeuilh, Sayous Veillet, Weiss, un volume Alcan, 1913.

2. *Traité d'économie politique*, t. I, C. IX, « phénomène essentiellement dynamique et surtout vivant. »

3. *Cours*, t. I, p. 205, 4^e édition. Est-ce que la définition précédente est compatible avec les phrases suivantes de la même page : « d'une part le nombre des entreprises a sensiblement diminué d'autre part le chiffre moyen du personnel par établissement a augmenté : c'est la preuve qu'il s'est opéré une concentration dans la branche d'industrie considérée » ou bien « l'accroissement numérique s'est produit pour les petits établissements comme pour les grands, mais l'importance moyenne de chaque entreprise a augmenté ; il y a concentration ».

transports et les relevés officiels nous montrent, clair comme le jour que la moyenne des entreprises présente les dimensions les plus humbles... » Il ne fait pas de confusion entre la *moyenne* et l'inégalité, car il poursuit : « En fait de concentration, il importe moins de déterminer le nombre moyen de salariés par entreprise que de savoir si la masse des salariés se répartit également ou inégalement entre les entreprises existantes. Il est bien vrai que le nombre moyen d'ouvrier employés n'est pas un indice sans valeur. Mais quelle en est l'exacte portée ? Il témoigne seulement que les entreprises de petite taille sont nombreuses. Il ne prouve aucunement qu'elles soient prédominantes ou, si l'on veut, *typiques* ».

Ici, M. Ansiaux se dirige nettement, sans s'en rendre compte, vers la notion de *mode* (c'est-à-dire le maximum de la courbe de répartition). Il continue : « La question de prédominance ne pourrait se trancher en leur faveur que si l'on établissait que cette moyenne n'est pas seulement une donnée d'arithmétique, mais correspond à la grande majorité des cas existants dans la réalité, en d'autres termes que les extrêmes sont peu éloignés de la moyenne » Le dernier membre de phrase ne regarde plus le mode, mais la *dispersion*; on traduirait assez bien la nouvelle pensée de M. Ansiaux en parlant d'*écart quadratique* ou de *dispersion des quartiles*.

Continuons la citation : « Or, telle n'est pas la situation. Celle-ci se caractérise plutôt, d'une part, par l'emploi d'un grand nombre d'ouvriers dans un petit nombre d'entreprises, et, d'autre part, par un pullulement d'entreprises minuscules à peine dignes de ce nom. » Rien dans les statistiques ne peut permettre d'envisager l'existence de deux catégories aussi tranchées. On constate toujours

une diminution progressive et très rapide du nombre des entreprises avec le nombre des ouvriers employés.

Que devons-nous retenir de ceci, pour la recherche d'une mesure précise ? Ceci : que la concentration est liée à la façon *dont se répartit également ou inégalement la masse des salariés entre les entreprises existantes.*

§ 3. C'est ce que déclarait fort bien l'Institut international de statistique dans un vœu, à la session de Londres, en 1905¹ :

« L'institut émet le vœu, que le terme concentration, ne soit employé dans le langage statistique que lorsqu'il y a diminution absolue et relative (sens dynamique). De cette manière, on ne devrait pas faire usage du mot concentration en supposant que toute augmentation des grands établissements, toute accumulation des ouvriers d'une certaine catégorie d'industries dans les mêmes établissements est un phénomène qui réalise la prédiction de K. Marx, en 1847. Là, où *il y a diminution du nombre des établissements et augmentation de leur activité productive nous pouvons conclure qu'il y a, non pas concentration, mais développement et accroissement.* »

§ 4. Nous sommes donc ramené au même problème que pour la définition et la mesure de l'inégalité des revenus. Nous le résoudrons donc par les mêmes moyens.

L'étude des procédés employés par les auteurs qui nous ont précédé, sera, ici, très courte. La comparaison des répartitions d'une époque à l'autre a toujours été faite au moyen des pourcentages et nous avons déjà vu les

1. B. I. I. S., XVII, p. 102. Le texte du vœu est dû à Y. Guyot.

défauts très graves de cette méthode. Prenons, cependant, un exemple.

M. Ansiaux étudie p. 175, t. I, de son *Traité la concentration en Allemagne de 1882 à 1907*. Le tableau XLVII donne les pourcentages du nombre total des entreprises et du nombre total des personnes occupées pour les trois recensements de 1882, 1895, 1907. La statistique englobe outre l'industrie proprement dite, l'horticulture, la pêche, le commerce et les transports.

Tableau XLVII. — Concentration en Allemagne

(catégories d'entreprises d'après le personnel	Pourcentages du nombre total des entreprises			Pourcentage du nombre total des personnes occupées		
	1882	1895	1907	1882	1895	1907
Exploitations individuelles	62,5	54,5	42,2	25,6	16,7	10,1
Petites (1 à 5 personnes)...	33,4	38,8	49,0	33,5	29,8	27,2
Moyennes (6 à 50 pers.)...	3,8	6,1	7,8	18,9	23,9	25,4
Grandes (50 à 1.000 pers.)...	0,3	0,6	0,9	19,1	26,2	30,7
Très grandes	0,0	0,0	0,0	2,9	4,4	6,6

La moyenne du personnel par entreprise passe de 2, 4 à 3, 2 puis 4, 2.

Laissons la parole à M. Ansiaux : « Le tableau est particulièrement instructif. L'évolution rapidement progressive au tournant du siècle s'y traduit d'une façon particulièrement frappante. Le personnel des entreprises individuelles tombe du quart du personnel total en 1882 au dixième en 1907. Leur nombre proportionnel se réduit aussi beaucoup. Dans le même laps de temps, la proportion des petites entreprises au total augmente sensiblement, alors que leur pourcentage faiblit. Les moyennes

entreprises se développent incontestablement, mais les grandes gagnent davantage... »

§ 5. Appliquons la transformation de la loi de l'effet proportionnel, nous savons depuis le chapitre V, Ex. II (§ 5) que cette loi s'applique très bien aux répartitions de personnel dans les entreprises. Nous obtenons donc une droite pour chacune des trois années. Donc aucune des catégories n'a eu de mouvement particulier. Il ne peut s'agir que d'un mouvement d'ensemble. Nous ne devons pas considérer les individuels, comme le fait M. Ansiaux, car ils ne forment pas une entreprise au sens statistique du mot¹. Il ne reste que trois catégories pour le personnel, c'est-à-dire deux points pour déterminer notre droite.

Il faut comme dans les exemples du chapitre V, 1^{re} Partie, calculer les pourcentages des entreprises de personnel supérieur à 6 et à 50 par rapport au personnel total (Individuels exclus). Puis la table donne z .

	%	%	%	z		
6 :	10,9	14,7	15,1	0,87	0,74	0,73
50 :	0,8	1,3	1,6	1,70	1,57	1,52

L'indice d'inégalité du chapitre VII s'en déduit par une division. On obtient ainsi pour les indices 121, 121, 127

Que faut-il conclure ? 1° La statistique utilisée par M. Ansiaux est trop peu détaillée pour permettre une mesure convenable de l'indice (il faudrait plus de deux points pour *ajuster*). 2° Il n'apparaît aucune variation de concentration, celle-ci étant en rapport avons-nous dit avec l'inégalité de répartition des salariés².

1. Chapitre II, § 3.

2. On voit donc que la définition de M. March ne peut nous servir; en considérant une séparation fixe, 50 ouvriers, elle lie la définition de la concentration à l'importance du personnel moyen.

En résumé, *la concentration se définit et se mesure comme l'inégalité de répartition des entreprises suivant leur importance.*

Reste à voir quelles restrictions va nous imposer la nécessité d'utiliser des séries statistiques et de quelle façon se relie à cette définition la distinction entre grande et petite industrie. Ce sera là l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

RECENSEMENTS INDUSTRIELS ET CONCENTRATION

§ 1. Nous avons écrit, à la fin du précédent chapitre : la concentration se définit et se mesure comme l'inégalité de répartition des entreprises suivant leur importance.

Nos matériaux ne pourront être que des résultats de recensements. Il faut donc nous demander si la statistique dénombre des entreprises et si elle mesure leur importance. Enfin elle fait des classements suivant la nature de l'industrie, et il faut savoir ce qu'elle entend par ce mot « nature ». Nous avons donc trois problèmes à examiner.

1° L'unité de recensement est-elle l'entreprise ?

§ 2. « Nous pouvons entendre par entreprise, nous dit Marshall¹, tout établissement destiné à pourvoir aux besoins d'autrui, en vue d'un paiement direct ou indirect fait par ceux qui en bénéficient. » Cette définition a pour nous l'inconvénient de contenir le mot établissement qui est beaucoup plus précis, au moins en français, que le mot entreprise.

1. Principes, I, IV, XII, 493, cité par M. Perroux dans le *Problème du profit*.

Partons plutôt, avec M. March¹ de la notion d'*activité économique*. C'est, écrit-il, tout ce qui concourt à réaliser des produits ou des services en vue d'un échange. L'*industrie* est l'activité économique envisagée dans ses résultats particuliers et l'exercice d'une industrie à un endroit donné constitue une *exploitation*.

Cette notion d'*exploitation* a deux principaux avantages : elle est très nettement distincte de la *profession* et elle contient l'idée de lieu, très favorable à une utilisation statistique. La profession possède un caractère personnel très différent du caractère impersonnel de l'exploitation. Elle implique l'idée d'*apprentissage*. Or, la division du travail entraînant la spécialisation des fonctions a fait disparaître dans la grande majorité des cas « l'identité entre la profession apprise et l'opération industrielle accomplie² ».

Ne croit-on pas qu'il existe, dans l'idée d'entreprise, un mélange complexe de profession et d'exploitation ? Un chef d'industrie, ce que l'on appelle en jargon financier, un chef de groupe, doit-il considérer l'ensemble de son activité comme composée de plusieurs entreprises ? Que penser de l'activité du banquier d'affaires ? Sa profession n'unit-elle pas les exploitations dont il s'occupe ? Il y a là des questions difficiles que la notion d'exploitation écarte de notre sujet.

Il faut encore préciser. Souvent, au même lieu, plusieurs industries sont exercées simultanément. Comment les distinguer ? On ne peut utiliser le produit industriel obtenu, puisqu'ils peuvent être multiples. Il faut, de toute néces-

1. Introduction aux « Résultats statistiques du recensement des industries et professions, du 29 mars 1896 ». Nous y avons fait de fréquents emprunts.

2. March *loc. cit.*

sité, s'appuyer sur le groupement de travailleurs d'une activité déterminée. C'est l'*établissement*, unité technique qui, finalement, s'oppose à l'entreprise, unité économique.

§ 3. L'instruction ministérielle du 13 février 1896 déclare : « On entend par établissement, la réunion de plusieurs personnes travaillant ensemble, d'une manière permanente, en un lieu déterminé, sous la direction d'un ou plusieurs représentants d'une même raison sociale. » Le groupement de personnes, la constitution juridique de la responsabilité sociale, la notoriété publique, l'existence d'un siège en un lieu déterminé, rendent facile une délimitation. Il faut rapprocher ceci de la définition du « ménage » comme groupement de personnes vivant ensemble sous la direction du même chef. Les établissements pourront être *juxtaposés* ou *associés* suivant l'intensité du lien qui les unit, *conjugués* ou *auxiliaires* (réparations par exemple). Nous ne nous étendrons pas sur ces distinctions¹.

§ 4. Les statisticiens français recensent l'établissement, et non l'exploitation, ni l'entreprise. A fortiori, les phénomènes d'intégration verticale ou horizontale restent inconnus dans un dénombrement général. Il en est ainsi à l'étranger, bien que la « collectivité type » varie beaucoup. Les Allemands utilisent le « Betrieb », voisin de l'exploit-

1. Voici une citation de M. March qui montre bien l'intérêt de la notion d'établissement : « Le recensement industriel doit permettre de grouper dans une même catégorie toutes les personnes qui exercent la même profession, qui effectuent le même genre de travail et celles-là seulement. De grandes difficultés se présentent surtout pour la détermination de la profession individuelle de chaque personne recensée. Elles sont de beaucoup amoindries quand on cherche à caractériser l'industrie collective à laquelle concourent plusieurs personnes travaillant en commun, parce que l'indication des principaux produits fabriqués, des procédés collectifs de travail est un renseignement plus général. (B. I. I. S., XV, II p. 271.)

tation : plusieurs branches industrielles différentes réunies sous une direction commune, forment des « Teilbetrieb » ou exploitations partielles, non seulement si elles sont juxtaposées (système français), mais encore pour les opérations successives d'une même fabrication (lavage de la laine, filature, apprêt, teinture, etc...). Les industriels, eux-mêmes, font autant de fiches qu'ils estiment avoir d'exploitations distinctes. Le travailleur isolé qui, en France, forme avec les salariés sans emploi régulier, une catégorie spéciale, forme en Allemagne une « Betrieb » sous certaines restrictions d'autonomie (Selbständig)¹.

En Autriche, les règles se rapprochent tantôt des françaises, tantôt des allemandes : on ne sépare les exploitations partielles que si elles fournissent chacune un produit marchand. Pour les Suisses, l'entreprise est définie comme toute activité professionnelle s'exerçant dans un but lucratif; il peut donc exister plusieurs entreprises recensées pour le même individu. En Belgique, c'est à peu près le système allemand : l'unité est la division d'entreprise et le travail fait au jour, est distinct dans les mines de celui fait au fond². Aux Etats-Unis, un « establishment » est l'ensemble des fabriques dépendant d'un même propriétaire, engagées dans la même industrie, situées dans le même Etat³.

1. La statistique allemande utilise aussi le « Gesamtbetrieb », réunion d'entreprises dépendant de la même direction et ayant une *comptabilité* commune, que ces exploitations soient connexes ou non qu'elles se trouvent dans le même lieu ou non. Elle a aussi les « Nebenbetrieb », exploitations accessoires où le travail est exécuté par le personnel d'une autre exploitation.

2. Le recensement belge groupe les divisions d'entreprises en exploitations complexes.

3. De plus on ne recense pas les petites exploitations. Dans le recensement de 1905 par ex. on voulait distinguer les établissements travaillant pour le marché général de ceux dont la clientèle est purement locale (factory system). Le classement est fait suivant le nombre *maximum* d'ouvriers au

On voit toute la difficulté de comparaisons statistiques qui résulte seulement des divergences sur l'unité de recensement. Nous en verrons bien d'autres, dans la suite.

2° La mesure de l'importance.

§ 5. En France, on ne possède comme élément d'appréciation, que le nombre des personnes occupées dans chaque établissement et à la rigueur, la puissance motrice. C'est très peu, car il serait nécessaire pour obtenir une idée précise, de connaître les capitaux engagés ou incorporés, l'outillage, les débouchés, etc... Seule une monographie bornée à une industrie particulière peut y parvenir. Comment connaître la situation réelle de l'agriculture, si on recense seulement les exploitations et le personnel occupé ? « Suffira-t-il, écrit M. March¹, d'une comparaison du nombre des personnes engagées dans la fabrication des chaussures, autrefois et aujourd'hui, si l'on n'expose pas en même temps la variation de puissance des forces motrices inanimées et l'état comparatif de l'outillage ? Quelle mesure a-t-on de l'importance relative de deux industries telles que la fabrication du sucre et celle de l'acide sulfurique, au point de vue de l'activité nationale, si, après avoir indiqué le personnel qu'un recensement effectué en décembre attribue à chacune d'elles, on néglige de faire connaître que, dans l'une, ce personnel travaille sans interruption 360 jours par an, tandis que dans l'autre il ne travaille que durant 80 ? La valeur de la production,

cours de l'année, les différences avec les méthodes européennes sont trop grandes pour permettre des comparaisons utiles.

1. « Résultats du recensement de 1896 », introduction, p. 2.

le montant des salaires payés n'ont-il pas aussi une importante signification ?

§ 6. Faut-il donc renoncer à notre définition de la concentration ou se borner à la mesurer d'une manière très imprécise ? Non, car nous avons seulement besoin, pour notre but, que les importances *relatives dans une même industrie* soient respectées. Il est bien certain que le nombre des ouvriers grandit moins vite que l'importance des établissements qui les emploient¹. Mais on possèdera cependant un critérium *relatif* intéressant dans l'importance du personnel.

§ 7. On doit approuver sans réserves les statisticiens anglo-saxons qui cherchent à réunir tous les renseignements sur les entreprises qu'ils recensent. Le recensement aux Etats-Unis, qui a lieu tous les deux ans, porte sur la production, la main-d'œuvre, et les salaires, les matières premières utilisées; au moins pour les entreprises dont la production dépasse 5.000 \$. En Angleterre, on indique les productions brutes et nettes, la production nette étant obtenue en retranchant de la valeur brute le coût des produits achetés ou des matières premières. D'ailleurs les congrès de l'Institut international de statistique, se sont souvent occupés de la mesure de l'activité productrice². Mais on voit que nous pouvons nous en passer.

En résumé, nous prendrons comme caractéristique de l'importance d'un établissement le *personnel utilisé*. Les recensements seront ainsi directement utilisables³.

1. Ansiaux, *Traité*, t. I, p. 180.

2. « Rapports » de M. Flux et Bowley, à la 2^e section du Congrès du Caire, 29 décembre 1927, 5 janvier 1928.

3. La commission de 1894, créée sur l'initiative de l'office du travail, pour étudier les conditions d'un recensement industriel avait conclu, sur le rap-

3^o Classification des industries.

§ 8. En principe il doit y avoir autant d'industries différentes que de produits différents et de procédés différents d'obtenir ces produits, soit un nombre quasi infini,

Pratiquement il faut délimiter les industries d'une manière qui ne soit ni trop étroite, ni trop large¹. Cette question est liée à celle d'un répertoire technologique des industries : celui-ci a, en effet, pour but d'identifier le travail auquel correspondent les désignations professionnelles faites en langues diverses. Sa réalisation, dont on a longtemps douté, entraînerait une délimitation internationale indispensable pour les comparaisons de pays à pays².

Les bulletins de recensement ont permis de dresser des listes de plusieurs milliers de noms. La statistique générale de la France a adopté un numérotage principal décimal, comme pour le classement des bibliothèques (système Melvil Dewey). Elle considère 10 grandes sections numérotées de 0 à 9.

0. Profession inconnue.
1. Pêche.
2. Forêts et agriculteurs.
3. Industries extractives.

port de M. Levasseur, à un dénombrement des exploitations. Cette méthode comme nous l'avons vu, n'a pas été adoptée pour les recensements, en particulier, celui de 1896. La notion d'établissement était plus maniable. Nous aurions pu ainsi étudier la concentration des exploitations, plus proche de celle des entreprises que celle des établissements.

1. Résolution de l'Institut, 1905, session de Londres : « Les différents pays sont invités à arrêter une classification industrielle qui ne soit ni trop large, ni trop étroite en s'astreignant autant que possible à l'identité des grandes divisions, sauf à chaque pays à la subdiviser d'après les convenances particulières.

2. Cette question du répertoire a donné lieu à de nombreux travaux dont on trouvera une bibliographie sommaire à la fin de cet ouvrage.

4. Industries de transformation.
5. Manutention et transport.
6. Commerce, spectacles et banque.
7. Professions libérales.
8. Soins personnels, service domestique.
9. Services de l'Etat, des départements, des communes.

Dans chacune de ces industries, les professions ou industries sont placées à la suite les unes des autres et numérotées par l'addition d'une ou plusieurs décimales, à la suite du numéro de la section. La statistique générale s'est d'ailleurs efforcée de rapprocher le plus possible les industries voisines.

Exemples : 7.44 généalogiste, graphologiste ou numismate; 6.113 marchand d'abeilles; 47.716 fabricant d'appareils pour eaux gazeuses, etc...

On voit la minutie d'un tel classement. Pour faciliter les rapprochements, le recensement distingue des groupes désignés par des lettres majuscules. Ainsi la section 4 comprend, 4A industries mal désignées, 4B industries de l'alimentation, 4C industries chimiques, etc... Les totaux ont été calculés pour tous ces groupes. Des lettres minuscules introduisent des subdivisions. Ainsi le groupe 4C des industries chimiques, comprend 4Ca amidon, fécule; 4Cb produits pharmaceutiques, 4Cc huiles, bougies, savons, etc. On peut ainsi étudier commodément tous les groupements désirables¹.

§ 9. Les comparaisons internationales détaillées sont presque impossibles, surtout quand la base est la profession.

1. Les changements de nomenclature de la S. G. F. sont très gênants. Il est à souhaiter qu'elle continue à les faire très peu fréquents.

L'adoption de l'exploitation ou de l'établissement simplifie le problème. Comme l'a écrit M. March¹, « la comparabilité est assurée pourvu que chaque rubrique des tableaux relatifs à une même industrie corresponde partout à un même caractère ». Mais, ajoute-t-il, « c'est là une condition très difficile à réaliser à cause de l'extrême variété des combinaisons de travaux de procédés et de produits qui caractérisent les différentes industries et du manque ordinaire de précision des rubriques ». Ainsi pour l'Alsace-Lorraine, le recensement allemand de 1907 rattache la fabrication des chapeaux de paille à l'industrie du bois; le recensement français de 1921 la classe dans l'industrie du vêtement. A ces difficultés de comparaison, il faut ajouter les différences dans les époques de recensement, les industries saisonnières sont de ce fait très mal connues (sucre, bâtiments, agriculture, etc...).

4° La petite et la grande industrie.

§ 10. Nous avons vu que, dans le cas général, la distinction entre la petite et la grande industrie résultait de la répartition d'après leur importance. Doit-on prendre comme critérium l'indice de concentration ? Certainement non, car cet indice peut être élevé pour une industrie qui ne comprend que des petits établissements très inégalement répartis, ou très faible pour une industrie à grands établissements de grandeur voisine. On voit donc qu'un critérium doit utiliser, à côté de l'indice de concentration, une grandeur caractéristique comme la moyenne, le mode

1. « Recensements industriels et statistiques de chômage ». Rapport à l'I. I. S., XV, II; p. 271 (1905).

ou la médiane. En réalité, il semble qu'il faille s'en remettre au sens commun et ne pas chercher une distinction trop mathématique. L'étude des procédés de fabrication ou de vente, les liaisons entre entreprises intégrées ou associées, les débouchés sont des caractéristiques de la grande industrie que l'on ne peut négliger. Nous utiliserons d'ailleurs très peu dans les pages qui vont suivre, cette distinction, bornant notre étude à l'inégalité de répartition, c'est-à-dire la concentration.

CHAPITRE III

L'ETUDE DES DONNEES STATISTIQUES

§ 1. Nous allons montrer comment on peut appliquer la formule de l'effet proportionnel et utiliser l'indice de concentration pour étudier les problèmes suivants dont on voit tout l'intérêt en économie politique :

Les variations de concentration en France de 1896 à 1921, l'influence de la reconstitution des régions libérées sur la concentration, la concentration en Alsace-Lorraine avant et après la guerre (recensements de 1907, 1921, 1926), la concentration industrielle dans différents pays du monde.

1° La concentration en France de 1896 à 1921.

§ 2. On ne peut faire porter les comparaisons que sur les années 1896, 1901, 1921 et partiellement sur 1926. En 1911, les personnes actives avaient été classées, non d'après l'industrie exercée, mais d'après la profession individuelle, la spécialité de travail. Les deux recensements, comme nous l'avons fait observé, n'ont pas la même étendue, ni la même portée¹.

1. Ainsi le comptable d'une société électrique est classé, comme profession, dans les comptables 606 et comme employé, dans l'industrie électrique, 4.925.

Nous étudierons d'abord les établissements industriels dans leur ensemble, puis les différents groupes. Lorsque nous comparerons les indices d'industries différentes, il faudra toujours se souvenir qu'il dépend de l'hétérogénéité des industries envisagées et qu'un classement plus minutieux par exemple, infirmerait peut-être les conclusions.

§ 3. Avant la guerre, la population totale de la France oscillait autour de 58,5 millions d'habitants. Les 90 départements de 1921 en ont 58,8. La population active est passée de 18.970 milliers à 21.720 en 1921, soit 15 % d'augmentation. En même temps le pourcentage des femmes dans la population active passait de 23,9 % à 28, conséquence immédiate de la guerre.

La répartition de cette population active par grandes catégories professionnelles a peu varié, en somme, malgré un certain mouvement en faveur de l'industrie et du commerce. (Tableau XLVIII.)

Tableau XLVIII

Répartition de la population active en France (en %)

	1921 (0 dép.	1896
Agriculture, forêts	41,6 %	45,0 %
Industrie, transports	36,1	33,7
Commerce	10,7	8,7
Autres profession:	11,6	11,3

a) *Les grandes sections professionnelles.*

§ 4. L'ensemble « industrie » du tableau XLIX comprend les industries extractives et de transformation et le groupe

des services publics industriels. N désigne¹ le nombre d'établissements occupant au moins un salarié, P est le nombre total des salariés, n est le personnel moyen (quotient de P par N) et C l'indice de concentration. (Il faut noter, de plus, que les chiffres de 1921 sont relatifs aux 87 départements).

On voit que la *concentration* a peu varié, alors que le personnel moyen augmentait nettement, le nombre des entreprises décroissait, le personnel augmentait. On a souvent écrit le contraire, mais on confondait sous le nom de concentration, une augmentation de p ou une diminution de N avec une variation de C.

Tableau XLIX. - Personnel et concentration par sections professionnelles.

SECTIONS	ANNÉE	N	P	p	C
Industries 3, 4, 9 B)	1896	575.531	»	5,5	145,5
	1901	600.728	3.526.811	5,9	147,5
	1906	609.643	3.757.202	6,2	144
	1921	487.028	4.231.301	8,7	149,5
Agriculture et forêts (2)	1896	3.987.128	8.392.128	2,11	81,2
	1901	3.867.334	8.129.392	2,11	88,2
	1906	3.861.276	8.765.302	2,27	91,1
	1921	3.719.589	8.927.721	2,40	92,3
Commerce (6, 8 A)	1896	817.045	1.628.217	1,99	98
	1901	902.290	1.853.424	2,06	107
	1906	967.845	2.000.097	2,08	114
	1921	942.036	2.269.587	2,41	123

* Chiffres pour 1921 relatifs aux 90 départements : pour l'industrie nous avons pris seulement les 87 départements.

1. Afin de pouvoir utiliser directement les chiffres, nous avons adopté des *conventions différentes* de celles que l'on trouve pour le reste de cette étude. Il est facile de se rendre compte que ceci est d'importance négligeable. (Recensement, t. I, 3^e partie, p. 66.)

Pour les deux autres groupes, N désigne le nombre d'établissements, isolés compris, P la population active (patrons compris, chômeurs exceptés), conventions qui se rapprochent de celles utilisées par les statistiques étrangères (voyez plus loin). L'*agriculture* marque un léger mouvement de concentration, le personnel croît lentement. Le retour de l'Alsace-Lorraine (chiffres ici pour 90 départements) a compensé et au delà nos pertes de la guerre. Le *commerce* (6, commerce proprement dit, 8A soins personnels de nature commerciale tels que coiffeurs, bains, etc...) a un mouvement très net de concentration pendant le quart de siècle étudié. Le personnel moyen augmente.

Voici donc, pour les trois grandes branches de l'activité française, trois tendances pour la concentration, augmentation nette pour le commerce, légère pour l'agriculture, nulle pour l'industrie.

b) *Etude détaillée des principales divisions.*

§ 5. Nous allons passer en revue différentes classes plus détaillées retenant les plus intéressantes, soit par leur évolution, soit par l'importance de leur population active. Nous avons choisi, tantôt un groupe, tantôt un sous-groupe ou même une ou plusieurs divisions élémentaires de la statistique générale de la France, de manière à obtenir des ensembles homogènes de signification bien précise. Le tableau L permet de se rendre compte de la façon dont la formule de l'effet proportionnel s'applique aux divisions. Nous avons vu dans la première partie l'application au groupe « industrie » (sections 3, 4, 5, groupe 9 B).

Ce tableau donne le nombre des établissements dont le chiffre du personnel dépasse x , nombre réel ou calculé. L'approximation comme on le voit est très suffisante pour permettre de mesurer l'inégalité au moyen de notre indice.

Tableau L. — Nombre d'établissements ayant plus de x salariés
(Comparaison avec la loi de l'effet proportionnel)

RUBRIQUE	ANNÉE	x	5	10	20	50	100	200	500	1000	2000
Acides électroch. explosifs 4 Cd, 4 Cf.	1921	réel	483	365	244	128	73	41	»	»	»
		calc.	482	320	246	127,5	77	46	»	»	»
	1896	réel	211	135	85	31	14	»	»	»	»
		calc.	211	142	82	31,0	14	»	»	»	»
Métallurgie, (4,71).	1921	réel	»	133	129	119	103	79	50	33	15
		calc.	»	133	129	116	101	82	53,5	34,4	15,6
	1896	réel	»	92	91	80	68	56	31	16	4
		calc.	»	92,3	90,4	81,6	69,2	52,2	28,8	15	6,4
Agriculture ¹ (2).	1921	réel	325	67	16,7	1,7	0,19	»	»	»	»
		calc.	329	62	12,3	1,3	0,15	»	»	»	»
Commerce ¹ (6, 8 A).	1921	réel	1.029	476	204	62	23,7	8,3	2,4	»	»
		calc.	1.044	478	208	61	22	6,5	1,3	»	»
Industrie ¹ Alsace-Lorraine (3, 8, 9 B).	1926	réel	4.742	2.931	1.782	»	474	»	94	»	»
		calc.	4.705	2.998	1.825	»	475	»	92	»	»
	1921	réel	3.157	1.947	1.206	619	348	199	»	35	»
		calc.	3.150	2.035	1.242	611	338	181	»	35	»

1. Nombres pour 10.000. Les guillemets correspondent, soit au fait que la catégorie étudiée n'a pas d'établissements, soit que les divisions du recensement ne comportent pas les x nécessaires.

Le tableau LI donne pour les industries extractives, les industries de transformation, le commerce, la banque, les transports et même les professions libérales, des renseignements sur le nombre des entreprises, celui du personnel et la concentration, c'est-à-dire l'inégalité de ces entreprises dans la section considérée.

Voici comment ont été obtenus les chiffres :

Prenons comme exemple le recensement de 1921 (tome I, troisième partie) et l'ensemble acides, électrochimie, explosifs, 4 Ce et Cf. Les statistiques sont p. 100 et suivantes du document officiel. N est, nous l'avons dit, le nombre total des établissements, isolés compris, nous avons donc additionné les chiffres des colonnes 16 (ensemble des établissements) et 14 et 15 (isolés hommes et femmes) ceci pour les deux groupes 4 Ce et 4 Cf.

P est la population active, patrons compris, chômeurs exceptés, donc P est le total des colonnes « 3 (personnel) 6 et 7 (chefs) dont nous avons retranchés 12 et 13 » (employés et ouvriers sans emploi). Le personnel moyen p se trouve par division et C l'indice de concentration déterminé par un graphique¹.

On comprendra pourquoi nous n'avons pas considéré certains groupes devant la longueur des calculs. Souvent d'ailleurs ils ne présentaient pas d'intérêt pour nous².

1. Nous avons utilisé la méthode simplifiée de manière à abréger les calculs.

2. Ainsi le groupe 4A des industries indéterminées est composé de très petits établissements, un seul a plus de cinq salariés.

Tableau LI. — Population active et concentration dans les établissements.

France 1896-1906-1921 (90 départements)

	N	P	N	C
Section 3. — IND. EXTRACTIVES				
3. 1 Combustibles minéraux A	165	141.618	860	159
B	186	183.285	984	183
C	237	224.153	946	173
3. 61 Carrières (pierre à bâtir) A	5.156	28.609	5,74	92
» » B	4.854	26.527	5,46	96
» » C	1.221	12.404	10,3	85
Section 4. — IND. DE TRANSFORMATION				
4 B — Alimentation				
4. 12 Sucreries A	364	12.494	34,4	50,4
B	290	11.620	40,1	38,4
C	130	8.254	63,5	124
4. 162 Chocolateries A	207	4.900	23,6	121
B	200	8.594	42,9	111
C	272	14.450	53,2	97
4 C — Ind. chimiques				
4 Cd et Cf Acides électroch. et Explosifs A	690	10.861	15,7	101
B	704	17.688	25,1	116
C	1.057	37.463	35,4	118
4. 28 Gaz d'éclairage A	684	19.775	34,5	108
B	781	29.017	38,1	118
C	692	41.368	59,7	105
4 Ch. Matières colorantes A	502	6.236	12,4	93
B	571	10.001	17,5	99
C	746	15.715	21,1	100
4 D — Caoutchouc-papier-carton				
4 D (groupe entier) A	3.257	57.332	17,6	134
B	5.111	83.540	16,4	152
C	4.892	117.879	24,1	154
4 E — Ind. du livre				
4 E (groupe entier) A	10.017	79.470	7,9	118
B	12.330	104.445	8,5	124
C	13.078	117.772	9,1	122
4 F — Ind. textile				
4 Fc. Tissage de toile				
A	16.192	66.494	4,1	260
B	13.177	66.338	5,0	385
C	2.420	35.373	14,6	186
4 Fd 2. Tissage de coton				
A	19.808	121.516	6,1	380
B	12.258	117.998	9,2	485
C	1.442	113.095	78,3	210
4 Fc 2. Tissage de laine				
A	15.927	137.837	8,6	235
B	11.313	120.705	10,7	264
C	1.879	82.184	43,7	160
4 Ff 2. Tissage de soie				
A	37.479	82.729	2,2	227
B	21.219	69.466	3,3	223
C	7.224	51.917	7,2	157

Tableau LI. (suite)

		N	P	p	c	
4 G — Travail des étoffes						
4 Gb et Gc. Confection de vêtements, lingerie.	A	617.043	927.245	1,5	142	
	B	816.119	1.134.125	1,39	161	
	C	578.881	858.325	1,53	142	
4 J — Ind. du bois						
4. 625 Menuiserie de bâtiment.	A	79.236	144.685	1,82	110	
	B	76.342	145.509	1,91	132	
	C	58.858	121.971	2,07	120	
4 K — Métallurgie						
4. 71 et 715 Fourneaux, aciéries, laminoirs, four électrique	A	94	47.741	508	87	
	B	85	56.391	663	93	
	C	137	103.177	753	108	
4 L — Travail des métaux						
4. La forge, tréfilerie	A	61.403	157.423	2,57	254	
	B	59.277	177.635	3,00	244	
	C	69.101	225.913	3,27	222	
4. 76 Constr. mécanique	A	7.601	61.245	8,01	148	
	B	8.317	60.383	7,2	171	
	C	17.069	138.405	8,1	165	
4. 7.688 Automobiles	A	»	»	»	»	
	B	545	21.651	39,7	140	
	C	1.829	68.927	37,6	214	
4 Q — Terrassement, constr. pierres						
4. 93 Maçonnerie	A	110.435	278.787	2,43	100	
	B	96.995	276.924	2,86	102	
	C	71.586	299.533	4,18	119	
9 B — Services publics industriels						
9 B (groupe entier)	A	110	56.264	512	236	
	B	913	77.293	84,6	225	
	C	3.479	162.772	45,7	128	
Section 5 — Manutention et Transports						
5. 6 Navigation maritime	A	1.088	2.604	18.043	6,9	155
	C	56	936	23.318	25,9	208
	B	764	1.660	26.679	16,1	142
5. 7 Navigation fluviale	A	4.052	7.450	16.934	2,26	240
	B	3.400	11.556	24.523	2,12	164
	C	1.988	7.034	17.796	2,53	175
Batellerie	1907	»	7.678	12.661	1,65	100
	1912	»	7.162	12.483	1,74	94
	1921	»	5.056	10.017	1,98	110
	1926	»	5.328	9.709	1,82	126
Section 6 — Commerce et Banque						
6. 23 et 233 Epicerie (détail, gros)	A	84.142	123.595	191.202	1,55	123
	B	85.131	143.310	254.461	1,78	137
	C	93.440	189.816	314.352	1,66	151
6. 25 et 253 Boucherie (détail, gros)	A	14.011	39.921	90.690	2,27	64
	B	11.849	43.592	112.048	2,57	72
	C	9.763	42.862	110.667	2,58	88

Tableau LI. (suite)

6. 26 Vin au détail	A	95.144	153.098	233.976	1,53	73
	B	103.060	167.337	254.499	1,52	88
	C	93.858	150.502	230.196	1,59	108
6. 27 Restaurateurs	A	3.575	15.275	46.642	3,05	94
	B	4.248	21.840	67.831	3,10	102
	C	7.541	26.934	84.374	3,14	118
6. 5 Nouveautés et grands magasins	A	9.575	18.807	69.807	3,7	121
	B	7.954	18.069	81.865	4,6	138
	C	5.902	16.729	114.310	6,8	148
6. 9 Banque	A	721	3.332	32.038	9,6	101
	B	570	3.726	44.508	12,0	101
	C	259	4.385	119.673	27,3	97
6. 96 Asurances	A	3.855	5.328	13.670	2,56	208
	B	7.411	9.681	22.581	2,33	240
	C	8.108	11.640	42.100	3,6	174
Section 7 — Professions libérales						
7. 312 Culte catholique (religieux)	1906	652	1.876	31.397	16,7	100
	1921	123	2.201	45.804	20,8	81

A - 18 6

B - 1903

C - 1921

N - Nombre d'établissements

P - Personnel total

p - Personnel moyen

C - Indice de concentration

Nous allons étudier successivement sur le tableau LI la population active, le nombre d'établissements, le personnel moyen et l'indice de concentration de manière à permettre un classement des inégalités des diverses industries et la recherche d'un lien entre les caractéristiques des distributions.

§ 6. a) *La population active.* — P a augmenté de 1896 à 1921 pour les sections 3 et 4 d'environ 25 %. Cette augmentation ne s'est pas répartie uniformément; la chocolaterie a gagné 240 %, les industries chimiques respectivement 150, 110 et 150 %, le groupe caoutchouc, papier, carton 110 %, la métallurgie 120 %, les constructions mécaniques 125 %, l'automobile 225 %, et les services publics 190 %. L'industrie du livre, les forges, tréfileries

et les mines de combustible gagnent 50, 45 et 60 %. La guerre n'a en rien modifié ces mouvements.

Par contre, d'autres groupes ne bougent pas : tissage de coton, confection de vêtements, menuiserie, maçonnerie. Certains perdent, la sucrerie 34 %, les tissages de toile, laine et soie de 40 à 50 %, les carrières de pierre à bâtir 50 %. Les industries textiles ont été fortement touchées par la guerre. Les statistiques de 1926 pour les départements du Nord et du Rhône, gros producteurs, semblent montrer un retour à l'état normal.

Pour le commerce, de 1896 à 1906, P augmente dans tous les groupes : vins 9 %, nouveautés 17, boucheries 27, épiceries 32, restaurants 46, banques 37, assurances 70. De 1906 à 1926, le mouvement reste très net; épicerie 22, restaurants 24, nouveautés 41; il s'accélère pour les assurances, 85 et les banques 170 %. Une légère diminution apparaît pour les vins (—10) et la boucherie — (5). Kaustky, puis M. Sayous ont affirmé que les isolés tendaient à diminuer dans le commerce de détail, par suite de leur situation difficile. Cela n'apparaît guère pour l'épicerie, les restaurants ou le commerce de vins, mais se manifeste pour les boucheries et les nouveautés (grands magasins).

§ 7. b) *Le nombre d'établissements.* — N dans l'ensemble croît légèrement. Les services publics industriels se sont développés dans une proportion formidable : leur nombre s'est multiplié par neuf de 1896 à 1906, par quatre de 1906 à 1921. La construction automobile a augmenté de 250 %, la construction mécanique de 125 %. Chocolateries, produits chimiques (sauf le gaz en régression depuis 1906), mines de combustibles, caoutchouc, industrie du livre, métallurgie augmentent dans des proportions comprises

entre 30 et 50 %. Ces mouvements ont lieu surtout de 1906 à 1921.

Forges, tréfileries bougent peu, menuiserie et maçonnerie perdent 30 %. On constate de fortes diminutions sur les sucreries (55 %), les carrières de pierres à bâtir (75 %), et surtout les textiles (toile 85 %, coton 93 %, laine 89 %, soie 81 %).

Dans le commerce, le nombre d'établissements croît partout de 1896 à 1906, sauf pour les magasins de nouveautés (une partie des isolés de 1896 travaille en 1906 dans les grands magasins), de 1906 à 1921 il décroît dans la boucherie, les vins, les grands magasins, croît dans l'épicerie, les restaurants, les banques et les assurances.

En général, *l'augmentation de la population active est accompagnée de celle du nombre des entreprises, et inversement*¹.

Les deux mouvements sont cependant différents; une augmentation rapide de P entraîne une variation plus faible de N (les grandes entreprises en profitant surtout) et une diminution modérée de P , une très forte variation de N (les isolés et les petites entreprises disparaissant). De plus, P varie depuis 1896 et N surtout depuis 1906.

§ 8. c) *Le personnel moyen par établissement* est le quotient des deux grandeurs précédentes; donc, il augmente, que P diminue ou que P augmente². On le cons-

1. On peut utiliser ici l'indice de co-variation $i = \frac{c - d}{n}$ de M. March (le coefficient de corrélation serait ici inutilement compliqué). On trouve entre N et P + 0,61 pour l'industrie, + 0,73 pour le commerce et les transports, + 0,65 pour l'ensemble : co-variation positive très nette.

2. En effet : $p = \frac{P}{N}$ entraîne $\frac{dp}{p} = \frac{dP}{P} - \frac{dN}{N}$ quel que soit le signe de dP on a $\frac{dp}{p} > \frac{dN}{N}$.

Les coefficients de co-variation de p avec P sont respectivement — 0,02 + 0,09; + 0,02. Il y a bien indépendance.

tate 49 fois sur 63; une seule exception nette : les services publics industriels, mais ils ont, en vingt-cinq ans, complètement changé de caractère. L'augmentation est énorme dans les textiles (250 % pour les tissages de toile et de soie, 400 % pour la laine, 1.200 % pour le coton) et les banques (180 %); elle est forte dans les industries chimiques (125 % pour les acides électrochimie, 70 % pour le gaz et les matières colorantes), les sucreries et chocolateries (90 et 130 %), les magasins de nouveautés (90 %), la navigation maritime (90 %), la maçonnerie (70 %), la métallurgie (50 %). Elle est plus faible pour les carrières de pierres à bâtir (45 %), le caoutchouc (35 %), les forges et tréfileries (30 %). Elle est presque nulle (10 à 15 %) pour les mines de combustibles, le livre, la menuiserie, la confection de vêtements, les constructions mécaniques, les divers commerces de détail (boucherie, épicerie, vins, restaurants), et la navigation fluviale. Elle est négative pour la construction automobile (— 5 %).

§ 9. d) *L'indice de concentration* varie pour l'industrie dans des sens divers. Il augmente fortement dans les sucreries et la construction automobile, légèrement (de 10 à 20 %) dans les mines, les diverses industries chimiques, le caoutchouc, la menuiserie, la métallurgie, la construction mécanique, la maçonnerie. Il ne bouge pas pour le livre, la lingerie. Il diminue légèrement pour les carrières et les forges, fortement pour les textiles et les services publics industriels. Dans l'industrie, *il ne paraît pas dépendre du personnel moyen*, mais paraît varier dans le même sens que le nombre des entreprises ou le personnel total. Ce n'est cependant qu'une indication assez vague¹.

1. Indice de co-variation avec N ou P + 0,17; avec p, — 0,02.

Dans le commerce, l'indice augmente nettement partout (épicerie, boucherie, vins, restaurants, nouveautés); il diminue légèrement pour la banque et fortement pour l'assurance. Il paraît lié au personnel moyen ou à la population active¹ (deux exceptions seulement).

La navigation se déconcentre, mais de 1906 à 1921; les mouvements sont inverses pour les transports fluviaux ou maritimes. L'inégalité de répartition des bateaux par entreprise augmente depuis 1912.

En résumé, il paraît difficile de déterminer définitivement les liaisons de C avec p , P, ou N. L'indice de concentration possède une individualité propre.

§ 10. e) *La comparaison des indices C* permet, sous certaines réserves, de classer les industries ou professions d'après leur état de concentration² :

(177 à 235) *Forte concentration* (tissages de toile et de coton, forges, tréfileries, automobiles).

(133 à 177) *Moyenne concentration* (mines de combustibles, tissages de laine et de soie, caoutchouc, construction mécanique, travail des étoffes, nouveautés, épiceries, assurances, navigation maritime et fluviale).

(100 à 133) *Faible concentration* (sucrierie, industries chimiques — gaz, électrochimie, matières colorantes — industrie du livre, menuiserie, maçonnerie, métallurgie, Services publics, vins, restaurants).

(75 à 100) *Très faible concentration* (chocolaterie, banque, boucherie, carrières de pierre à bâtir).

On nous objectera certainement l'étrangeté de cet as-

1. Indice de co-variation avec N + 0,4; avec P, 0,6; avec p 0,6.

2. L'indice est un rapport; les rapports des limites de tranches devront être égaux (ici $\frac{3}{4}$).

semblage hétéroclite, mais les industries voisines ne sont pas séparées si des industries différentes sont rapprochées : industries chimiques, divers tissages, vins et restaurants, etc. Tout classement des industries ou professions donne des résultats semblables; nous l'avons vu en étudiant p , P ou N .

On voit, par exemple, que la métallurgie et la banque ont des concentrations plus faibles que l'épicerie. N'est-ce point paradoxal ? Mais non, tous les établissements métallurgiques sont grands, la plupart des épiceries sont petites; l'inégalité pourra donc être plus faible entre les premiers qu'entre les seconds. Le mécanisme dynamique indique que le classement précédent range les industries d'après la mobilité moyenne des effectifs.

En résumé, on constate comme nous l'avons déjà vu, une augmentation de la concentration, forte pour le commerce, faible pour l'agriculture, nulle pour l'industrie. L'étude détaillée nous montre un lien très net entre la population active et le nombre d'établissements entraînant, en général, une augmentation du personnel moyen. L'inégalité des établissements est variable d'une industrie à l'autre; elle ne paraît pas dépendre du personnel moyen, peut-être peut-on la lier à la population active ou au nombre total des établissements.

2° La reconstitution des régions libérées.

§ 11. Le recensement de mars 1921 avait trouvé les départements du nord et de l'est en pleine reconstitution. Il nous a paru intéressant à divers égards de rechercher l'influence de cet état anormal sur la concentration des entreprises.

M. de Ville-Chabrolle, dans le *Bulletin S. G. F.* (octobre 1925, p. 69) étudiant la population active des régions libérées en 1906 et 1921 arrivait à la conclusion suivante : l'influence de la reconstitution a produit un certain accroissement de la concentration dans certaines industries ou certains commerces. De plus les travaux de la reconstruction ont conduit à une forte augmentation de la population active dans les travaux publics, la construction mécanique ou métallique.

Cependant en octobre 1926 (*Bulletin*, p. 65), l'étude de la France restante d'avant-guerre (77 départements) amenait M. de Ville-Chabrolle à des conclusions analogues. L'influence de la reconstitution restait donc douteuse.

Nous reprenons donc cette question en utilisant de plus les résultats déjà publiés de 1926 pour les dix départements libérés. Ici comme précédemment l'indice sera une indication précieuse. Nous nous sommes borné à l'industrie et au commerce, laissant de côté l'agriculture dont les réactions sont très différentes. Les chiffres du tableau LII montrent la grande place des régions dévastées dans l'économie française, le personnel moyen par établissement est double, l'industrie est plus évoluée, mais la concentration est peu différente.

Nous étudions les différentes catégories en suivant le plan du paragraphe précédent, population active, nombre des établissements, personnel moyen et indice de concentration.

§ 12. a) *La population active* diminue plus fortement, dans l'industrie, de 1906 à 1921 pour les régions libérées (10 %) que pour le reste de la France (2 %). L'influence de la reconstitution est favorable pour les carrières (—20

au lieu de -32%), énorme pour les travaux publics, bâtiments (150 au lieu de -10). Elle n'apparaît pas pour le travail des métaux. Elle est favorable pour les mines de combustibles (0 au lieu de $+30$), les textiles (-38 et -15), la métallurgie lorraine ($+20$ et $+50$), le commerce (-5 et $+13$). 1926 marque un relèvement très net pour les régions libérées.

b) *Le nombre des établissements* diminue plus fortement dans l'industrie de 1906 à 1921 pour les régions libérées (38 %) que pour le reste de la France (26 %). La reconstitution a favorisé l'augmentation de *N* légèrement pour les mines de combustibles¹ (25 et 10 %), les carrières (-45 et -55), le travail des métaux (10 et -8), les travaux publics (-15 et -26). Elle a été défavorable, au contraire, pour les textiles (-65 et -35), la métallurgie (0 et $+70$), le commerce (-12 et -3). En 1926, *N* augmente dans les régions libérées pour tous les groupes.

c) *Le personnel moyen p* subit les deux variations précédentes. L'influence de la reconstitution est favorable pour l'industrie, en général ($+45$ et $+30$), les textiles ($+85$ et $+25$), les travaux publics ($+200$ et $+25$) et les carrières ($+55$ et $+45$), défavorables pour les mines de combustibles (-20 et $+20$), la métallurgie (12 et 40), le travail des métaux (-4 et $+60$), le commerce ($+5$ et $+25$). 1926 marque une augmentation de *p* sauf pour les carrières et les travaux publics.

1. Dans les bassins houillers, mais surtout pour la Loire, il y a un regroupement des exploitations très sensible de 1921 à 1926. Parfois comme pour la Loire ceci correspond à des liquidations judiciaires.) L'arrêt de la population active correspond pour la production à un recul, car une grande partie des ouvriers est utilisée aux travaux de déblaiement. Le rendement ouvrier journalier (jour et fond) de 695 kgs en 1913 passe à 470 en 1921, à 594 en 1926 et atteint 692 pour le dernier trimestre 1929. A titre d'indication la Haute-Silésie polonaise fait 1.345 et la Ruhr 1.278.

Tableau LII. — Population active et concentration.

A. 10 départements libérés (Aisne, Ardennes, Marne, Meurthe-et-Moselle, Meuse, Nord, Oise, Pas-de Calais, Somme, Vosges). — B. 77 départements restants. — a) Nord et Pas-de-Calais; b) Loire; c) Nord; d) Meurthe-et-Moselle. — N. Nombre d'établissements y compris les isolés. — P. Population active (patrons compri, chômeurs exceptés). — p. Personnel moyen. — C. Indice de concentration.

		ANNÉE	N	P	p	C
Industrie (3, 4, 9 B).	A	1906	386.083	1.429.857	3,70	217
		1921	239.766	1.288.637	5,38	173
		1926	230.685	1.510.338	6,58	187
	B	1906	1.949.031	4.797.370	2,46	172
		1921	1.436.400	4.704.405	3,27	172
Mines de combustibles * (3, I)	a	1896	24	71.645	2.985	»
		1901	26	92.189	3.545	»
		1906	23	108.941	4.736	»
		1921	29	109.549	3.777	»
	b	1926	26	194.945	7.497	»
		1896	25	16.467	659	»
		1901	28	20.556	734	»
		1906	31	19.613	633	»
		1921	34	26.167	770	»
		1926	15	28.856	1.920	»
Carrières (3 B).	A	1906	1.672	15.466	9,2	123
		1921	890	12.423	14,0	99
		1926	1.026	11.735	11,4	127
	B	1906	11.717	59.083	5,3	83
		1921	5.109	38.379	7,5	89
Textiles (4 F).	C	1906	19.307	199.671	10,3	380
		1921	6.649	126.200	19,0	255
		1926	7.788	198.971	25,6	310
	B	1906	142.773	508.133	3,6	235
		1921	92.630	431.387	4,7	214
Métallurgie * (4 K).	d	1906	22	20.085	912	»
		1921	23	24.102	1.048	»
		1926	23	34.630	1.507	»
	B	1906	109	26.974	241	»
		1921	174	49.367	353	»
Travail des métaux (4 L).	C	1906	6.258	52.345	12,0	201
		1921	6.816	78.560	11,5	113
		1926	8.378	90.845	10,8	124
	B	1906	152.828	632.304	4,1	179
		1921	142.863	974.236	6,8	185
Travaux publics Bâtiment (4 Q).	A	1906	28.128	89.046	3,2	106
		1921	24.835	225.165	9,1	115
		1926	27.921	145.466	5,2	109
	B	1906	149.745	439.918	2,9	120
		1921	111.612	399.057	3,6	133
Commerce et banque (Section 6).	A	1906	160.631	287.038	1,9	112
		1921	138.761	278.255	2,0	125
		1926	161.761	327.821	2,0	122
	B	1906	769.991	1.605.300	2,1	134
		1921	740.059	1.829.401	2,6	145

* La faiblesse de N nous interdit l'emploi de l'indice C.

d) *L'indice de concentration* est minimum dans les régions libérées pour 1921, dans l'industrie en général, constant en France. Le minimum de 1921 est très marqué pour les textiles, les carrières, le travail des métaux. 1927 est, au contraire, un maximum pour les travaux publics et le commerce, mais il en est de même dans le reste de la France.

En résumé¹, pour les carrières et les travaux publics, industries directement intéressées par la reconstitution, l'influence de celle-ci se traduit par une augmentation de la population active, du nombre d'établissements, du personnel moyen et de la concentration.

Pour les textiles, il y a diminution de N et de P, mais cependant augmentation du personnel moyen et diminution de la concentration. Ne peut-on songer à distinguer les industries à fort outillage fixe comme les textiles, les mines, la métallurgie et celles à capital circulant prédominant comme les carrières, les travaux publics et le travail des métaux ? Les premières se déconcentrent, les autres se concentrent sous l'influence de cet état anormal. Seule une étude complète pourrait dire le bien-fondé de cette hypothèse, les influences possibles sont trop diverses et trop complexes pour que nous puissions les aborder ici. Cependant elle est plausible et semble vérifiée par les chiffres de notre tableau.

3° L'Alsace-Lorraine avant et après la guerre.

§ 13. La comparaison des recensements allemand (1907) et français (1921 et 1926) en Alsace-Lorraine présente les

1. Il ne nous échappe pas que, par une sorte de choc en retour, la reconstitution a dû influencer le reste de la France, mais nous ne pouvons l'étudier ici.

difficultés de la comparaison des statistiques étrangères. Le fait qu'ils s'appliquent au même Etat facilite la tâche et fait de cette étude une introduction à la comparaison des concentrations dans les divers pays du monde.

En 1907, les Allemands ont procédé à deux recensements distincts, un recensement professionnel étendu à toute la population active et un recensement des entreprises. Comme nous l'avons dit, ils n'ont pas la même étendue, et M. de Ville-Chabrolle a dû, dans son étude du *Bulletin S. G. F.* (avril 1925, p. 301) les utiliser tous les deux afin de rendre possible une comparaison avec le recensement français de 1921. Nous avons totalisé pour les recensements français les chiffres des trois départements, Moselle, Bas-Rhin, Haut-Rhin. Les résultats ont été rendus comparables en suivant la méthode de M. de Ville-Chabrolle (*Bulletin S. G. F.*, t. 14, p. 319), nous comptons parmi les établissements de 1 à 5 personnes, les isolés et les établissements de 5 ouvriers. (Il n'y a par contre aucun moyen de connaître les établissements formés de deux patrons¹). Les personnes occupées comprennent les patrons mais non les chômeurs, conformément à nos conventions habituelles.

Voici, pour l'industrie (3, 4, 9 B) un tableau (LIII) qui, en donnant pour 10.000 le nombre calculé ou réel des établissements occupant plus de x personnes permet de vérifier l'application convenable de la formule de l'effet proportionnel.

1. On voit nettement sur cet exemple la minutie nécessaire pour les études statistiques. Devant son importance, nous n'avons jamais craint de donner des détails même élémentaires sur la façon dont nous avons obtenu les chiffres que nous utilisons.

Tableau LIII. — Nombre d'établissements occupant plus de x personnes
Alsace-Lorraine 1907, 1921, 1926. — (Industrie 3, 4, 9B)

	x	5	10	20	50	100	200	500	1000
1907	calculé	4.470	2.807	1.675	838	433	235	»	37
	réel	4.650	2.661	1.632	805	472	249	»	19
1921	calculé	3.150	2.035	1.242	611	338	181	»	35
	réel	3.157	1.947	1.206	619	348	199	»	35
1926	calculé	4.705	2.998	1.825	»	475	»	92	»
	réel	4.742	2.931	1.782	»	474	»	94	»

§ 14. Le tableau LIV donne les caractéristiques habituelles d'un certain nombre de groupes industriels ou commerciaux.

Tableau LIV. — Population active et concentration en Alsace et Lorraine ; a) 12 juin 1907. — b) 6 mars 1921. — c) 6 mars 1926.

CATÉGORIE		N	P	p	C
Industrie (3, 4, 9 B)	a	56.621	327.099	5,8	182
	b	46.405	314.637	6,8	194
	c	46.076	384.188	8,3	176
Mines et minières	a	74	23.668	320	87
	b	31	38.442	1.240	162
	c	37	49.356	1.330	115
Textile	a	5.846	77.953	13,3	330
	b	1.927	63.423	32,9	355
	c	2.008	79.226	39,1	204
Métallurgie, métaux	a	5.021	56.141	11,1	187
	b	5.221	65.573	12,6	205
	c	5.947	85.728	14,5	169
Travaux publics. Bâtiments	a	4.895	37.861	7,7	128
	b	4.862	28.496	5,9	123
	c	6.129	36.696	6,0	120
Agriculture	a	224.653	570.618	2,5	44
	b	96.937	288.916	3,0	47
	c	90.010	218.196	2,4	65
Commerce	a	38.936	80.555	2,2	114
	b	30.670	78.935	2,6	134
	c	29.280	84.938	2,9	130

a) *La population active*, après avoir, en général, marqué un minimum en 1921 est en net progrès sur 1907. Le mouvement dans l'agriculture paraît extraordinaire de 1907 à 1921. Il n'en est rien. En 1907, on avait recensé 182.156 travailleurs temporaires. M. de Ville-Chabrolle estime qu'il y avait 50.000 personnes exerçant la profession à titre accessoire. De sorte qu'après une discussion très serrée, il concluait que « l'emprunt réel fait par l'agriculture à l'industrie ou au commerce a dû être, en réalité, considérablement inférieur » à celui que les chiffres bruts semblent indiquer. Mais de 1921 à 1926, il y a eu une diminution de 70.000 personnes, réelle puisque les méthodes de recensement n'ont pas varié. Il lui correspond exactement les 70.000 personnes de gain de l'industrie.

b) *Le nombre des établissements* décroît dans l'industrie en général, les mines et minières, les textiles, l'agriculture et le commerce de 1907 à 1921. En général, 1926 donne des résultats très analogues à 1921, exceptés les travaux publics et le bâtiment.

c) *Le personnel moyen* croît partout de 1907 à 1926. On retrouve la caractéristique du mouvement en France. Une baisse dans l'agriculture coïncide avec une augmentation de la concentration; les grandes entreprises disparaissent (1.078 en 1921, 526 en 1926, établissements de plus de cinq personnes).

d) *L'indice de concentration* montre, en général, un maximum pour 1921, il est trop peu net pour qu'on puisse affirmer qu'il n'est pas dû aux différences de méthode. Dans les mines et minières, la variation est très importante : elle correspond au regroupement opéré par les mines domaniales aussitôt après la guerre.

De 1921 à 1926, on constate une baisse sensible de la

concentration. Peut-être faut-il l'attribuer au fait que la crise de 1921 augmentait la mobilité du personnel.

4° La concentration dans divers pays du monde.

§ 15. Nous avons vu dans le § 1 du chapitre II de cette partie, toutes les difficultés qui s'attachent à des comparaisons entre divers pays par suite de l'unité de recensement employé, de l'époque du recensement et de la division statistique utilisée. On ne doit pas, cependant, renoncer à tirer quelques indications des documents que l'on possède.

Le tableau LV présente les caractéristiques habituelles des distributions pour différents pays aux environs de 1907, il utilise ainsi les données d'une étude de M. de Ville-Chabrolle (*Bulletin S. G. F.*, avril 1913, p. 283).

Les établissements de toute importance ne permettent pas de constater des invariances. La trop grande différence des collectivités types en est certainement la raison. La suppression des établissements de cinq personnes et moins supprime la plupart des divergences. Aussi révèle-t-elle quelques lois intéressantes. Le personnel moyen varie avec la nationalité; presque le même en France, Allemagne et Luxembourg, il décroît légèrement quand on passe de l'Autriche à la Suisse et au Danemark. Le « factory system » des Etats-Unis ne permet pas une comparaison. La concentration est tout à fait semblable dans ces sept pays. On peut donc indiquer, sur cet exemple, qu'à la même époque, l'inégalité des établissements est à peu près la même dans tous les pays de civilisation comparable. Il y a là un caractère permanent du « système économique moderne ».

Tableau LV. — Population active et concentration en divers pays aux environs de 1907.

CATÉGORIE	ANNÉES	N	p	C	h*
<i>Etablissements d'importance quelconque :</i>					
France	1906	2.384.339	2,65	182	1.629
Luxembourg	1907	10.456	4,22	182	1.685
Allemagne	1907	2.021.465	5,40	151	1.735
Autriche	1902	848.264	3,52	170	1.131
Suisse	1905	189.883	3,89	170	2.139
Danemark	1906	84.145	3,74	141	1.209
<i>Etablissements de plus de 5 personnes :</i>					
France	1906	77.430	37,7	111	
Allemagne	1907	213.808	37,9	109	
Luxembourg	1907	713	37,3	128	
Autriche	1902	50.004	33,6	125	
Suisse	1905	14.408	30,6	101	
Danemark	1906	6.002	27,8	101	
Etats-Unis	1905	119.107	57	107	
<i>Mines et minières :</i>					
France	»	403	509	133	
Allemagne	»	1.354	446	143	
Luxembourg	»	70	83	85	
Autriche	»	706	460	133	
<i>Industries textiles :</i>					
France	»	7.449	84,3	121	
Allemagne	»	13.892	04,7	115	
Autriche	»	4.232	73	144	
Danemark	»	233	65	116	
Suisse	»	1.730	78	117	
Etats-Unis	»	5.464	308	112	

h* Population active par dix mille habitants.

Ces conclusions sont confirmées par l'étude de deux groupes particuliers, mines et minières (la prépondérance des minières de fer en Luxembourg explique l'écart correspondant) et industries textiles.

§ 16. L'étude de pays lointains où la civilisation euro-

péenne n'a pénétré que tard donne le même résultat. Ainsi en Turquie, le premier recensement industriel date de 1927¹ il a suivi le recensement de la population. Les industries ont été classées en neuf groupes distincts, les réponses étant trop incomplètes ou trop douteuses pour permettre des statistiques détaillées. Le nombre des locaux industriels, y compris les plus petits ateliers d'artisans s'élevait à 65.245 en décembre 1927 et celui des personnes occupées à 256.855. On voit que le recensement avait une certaine ampleur. Les quatre groupes les plus importants concernent la transformation des produits de l'agriculture, élevage, chasse et pêche, puis les textiles, les métaux et les industries du bois. Le tableau donne les données habituelles.

Tableau LVI. — Concentration industrielle en Turquie (1925)

N nombre d'établissements, *p* personnel moyen, C indice de concentration.

GROUPE	N	<i>p</i>	C
Agriculture	28.439	3,89	107
Textiles	9.353	5,15	124
Métaux	14.752	2,30	117
Bois	7.890	3,08	138
Industrie en général	65.245	3,94	111

On voit que les indices de concentration sont tout à fait du même ordre de grandeur que précédemment.

§ 17. En *Chine*, une brochure des directeurs du comité de l'Université de Nankai, Drs L. Ho et H. D. Fong,

1. *Bulletin S. G. F.*, octobre 1929, p. 84. Les agents recenseurs de la population avaient effectué un relevé des locaux professionnels relevé qui a servi de base ensuite au recensement industriel.

donne des renseignements sur la répartition des entreprises¹. Les statistiques (?) utilisées sont celles du ministère de l'Agriculture et du Commerce, ce sont les seules existantes. Elles concernent presque toutes les provinces pour 1912 et seulement une dizaine pour 1920.

On y considère comme « manufacture » tout établissement industriel utilisant ou non la force motrice. Chose inattendue, la loi s'applique bien à ces données douteuses et conduit à une indice de concentration normale : 151 pour 1912 et 147 pour 1920.

§ 18. Nous terminerons cette revue rapide des statistiques étrangères en discutant les chiffres donnés par M. R. Dernis dans une thèse récente *La concentration industrielle en Allemagne* (Paris, 1929). M. Dernis estime que la guerre a accéléré le mouvement de concentration en Allemagne. Si nous nous bornons aux données des recensements qu'il donne p. 11, rien n'apparaît, voici ses chiffres (tableau LVII).

Tableau LVII. — Concentration industrielle en Allemagne

ENTREPRISES	Nombre d'établissements		Perbounel occupé	
	1907	1925	1907	1925
Petites (0-5)	1.618.781	1.614.080	2.804.558	2.837.327
Moyennes (6-50)	160.091	205.911	2.305.015	2.898.756
Grandes (50 et plus) ..	24.994	32.761	4.673.177	6.958.190
Très grandes (au-dessus de 1.000)	504	892	1.175.565	2.109.005

1. *Bulletin de la S. G. F.*, janvier 1930 p. 203.

En utilisant les trois points fournis par les quatre divisions, on trouve¹ les indices de 148,5 en 1907 et 149,5 en 1925. *L'inégalité n'a donc pas sensiblement varié.*

5.° Conclusion.

§ 19. L'indice d'inégalité de la formule de l'effet proportionnel nous a permis d'étudier aisément un certain nombre de problèmes touchant la concentration des entreprises. Les exemples que nous avons donnés soit dans la première partie soit dans ce chapitre ont, nous l'espérons, convaincu le lecteur de la légitimité de l'emploi de l'indice. Les résultats que nous avons cru obtenir lui ont montré son intérêt.

En France de 1896 à 1921 nous avons mis en évidence une augmentation nette de la concentration, au sens que nous donnons ici à ce mot, pour le commerce, une faible augmentation pour l'agriculture et une situation inchangée pour l'industrie. L'étude détaillée des différents groupes professionnels nous a montré un lien très net entre l'importance de la population active et le nombre d'établissements, lien qui entraîne en général une augmentation du personnel moyen. Nous n'avons pu, malheureusement, lier la concentration à une caractéristique des distributions du personnel.

1. L'approximation donnée par la formule de l'effet proportionnel est excellente. En effet en se servant uniquement des petites, moyennes et grandes, on trouve par extrapolation pour le nombre des très grands établissements 560 et 705 et les indices calculés avec deux points seulement sont 151,5 et 145,5.

Avec les quatre points on trouve les résultats suivants :

Pour 1925, la proportion des petits établissements est obs. 87,1 %, calc. 87,4, celle des moyens 11,1 et 10,8, celle des grands 1,72 et 1,77, celle des très grands, 0,048 et 0,045. Le personnel moyen est observé 6,87 calculé 6,94. Pour les très grands le personnel moyen calculé 2.490, observé 2.370, on a une approximation aussi bonne pour 1907.

Equation pour 1925 : $z = 0,669 \log x + 0,342$.

L'étude de l'industrie des régions libérées a paru montrer l'influence de la reconstitution sur la concentration des industries à fort outillage fixe.

Enfin l'étude des statistiques étrangères en comprenant sous ce vocable celles qui sont relatives à l'Alsace-Lorraine, montre que le système économique qui nous régit actuellement correspond dans les divers pays du monde à une concentration des entreprises qui est partout du même ordre de grandeur.

QUATRIÈME PARTIE

LE CHAMP D'APPLICATION DE LA FORMULE DE L'EFFET PROPORTIONNEL

Les procédés mathématiques sont d'une importance capitale dans de nombreuses parties du domaine de la statistique, mais il existe une quantité de problèmes qui nécessitent un traitement mathématique d'une nature particulière...

L'ensemble de ce domaine est très étendu et il est nécessaire de choisir celles de ces méthodes qui sont fondamentales...

(BOWLEY, *Statistique*.)

SOMMAIRE DE LA QUATRIEME PARTIE

CHAPITRE UNIQUE.

La relation, mise en évidence dans la première partie entre la formule et la loi, permet de prévoir dans certains cas, une bonne application de la formule de l'effet proportionnel. Ainsi la répartition des communes de France ou des grandes villes du monde suivant le chiffre de leur population est convenablement représentés, de même celle des familles suivant le nombre des enfants.

De ce que les représentations économiques suivent cette formule, que faut-il en déduire pour une application en dehors de l'économique ? Un exemple convenablement choisi montre que l'on doit utiliser l'extension la plus générale du raisonnement de Kapteyn. On comprend ainsi la raison profonde de la simplicité de la loi économique. Le carré d'un revenu ou le cube du nombre des ouvriers n'a pas de sens, seul peut s'interpréter le logarithme, car car il exprime que les variations relatives sont indépendantes et qu'elles suivent la loi de Gauss.

L'interprétation de x_0 reste malheureusement impossible dans certains cas.

CHAPITRE UNIQUE

§ 1. Les pages qui précèdent nous ont donné de nombreux exemples d'une application très satisfaisante de la formule de l'effet proportionnel. Sans entrer dans le détail, qu'il nous soit permis de rappeler la diversité de ces répartitions, l'éloignement dans le temps ou dans l'espace des objets ou des individus recensés. Ainsi, pour nous en tenir aux richesses, la formule s'est appliquée à la répartition des fortunes à Bâle aussi bien pour le milieu du moyen âge que pour les années actuelles. Elle s'est montrée valable pour les revenus, les capitaux, les salaires, les profits, etc., bref pour toutes les grandeurs qui pouvaient nous renseigner sur l'inégalité des biens.

§ 2. Par suite de la liaison de la formule et de la loi¹, on peut prévoir sur des cas particuliers, l'application possible de la formule. Ainsi il ne serait pas étonnant que la répartition des villes suivant la grandeur de leur population suive la formule. Les causes qui provoquent l'accroissement des grandes villes, sont² ou bien de nature économique comme le développement de la bureaucratie, l'attraction exercée par les oisifs ou les retraités, les faci-

1. Nous avons étudié cette liaison dans la première partie, chap. IV, § 12; V, § 3; VI, § 1 et 8. Nous rappelons qu'il ne faut, à aucun prix, confondre *formule* et *loi*.

2. Leroy-Beaulieu, *Essai sur la répartition des richesses*, p. 197.

lités données à l'industrie manufacturière, le rôle grandissant des centres de dépôts de marchandises, ou bien politiques, comme le siège du gouvernement, un accroissement de territoire, ou enfin artificielles comme les grands travaux publics de luxe ou le siège d'une garnison.

Toutes ces causes agissent diversement sur les villes d'un pays. A priori, il est donc impossible de prévoir le mouvement de la population d'une ville déterminée sans une étude approfondie de ses principaux caractères. Mais pourquoi n'existerait-il pas une loi *statistique* régissant l'ensemble ? L'hypothèse de l'effet proportionnel est naturelle. Levasseur écrivait dans le *B. I. I. S.* : « Les villes, étoiles de première grandeur, ont avec les autres ce caractère commun qu'elles exercent en général sur la population rurale une puissance d'attraction qui est *proportionnelle* à la masse de leur propre population¹. »

Il suffit de généraliser l'idée de Levasseur pour obtenir la loi.

§ 3. Or la formule de l'effet proportionnel s'applique fort convenablement à la répartition des communes d'après le chiffre de leur population. Nous ne considérons que celles qui dépassent 5.000 habitants afin qu'on puisse leur attribuer un certain caractère urbain. On trouvera leur nomenclature dans le *Recensement général* du 7 mars 1926, 1, 1^{re} partie, p. 82. Elle va de Tréboul (Finistère) qui a 5.007 habitants à Paris qui en a 2.871.429.

Le tableau LVIII montre que deux paramètres donnent une bonne concordance. On peut vérifier autrement à l'aide des formules de l'annexe. Ainsi la population totale de

1. « La répartition de la race humaine » (*B. I. I. S.* XVIII, 2, 57)

ces communes est 17.648.211, soit une moyenne de 22.149. Calculée, la moyenne est 19.010. Éliminons Paris, la moyenne observée descend à 18.160, la moyenne calculée à 18.635¹.

De même, la médiane calculée correspond à 8.849 habitants. Or Provins en a 8.845 et est aux 51,6 % de la distribution. La vraie médiane, Chauny, en a 9.267.

Les quartiles sont Aurillac (17.153) et L'Hôpital (6.287).

Les chiffres calculés sont 16.409 et 6.562. Le dernier centile est Toulouse (180.771). Le calcul donne 166.910, etc...

Le tableau LVIII donne aussi l'évolution de l'inégalité. Elle reste au voisinage de 100 (voyez revenus) et ne paraît pas se modifier avec le temps. Cependant le nombre des communes intéressées a presque doublé.

Tableau LVIII. — Population des communes de plus de 5 000

<i>x</i> Habitants	<i>n</i>	N observé	N calculé	Formule :			
5.000	86	795	795	$z = 1,013 \log(x - 5\ 000) - 3,632$			
5.500	74	709	713	Indice : 99			
6.000	69	635	633	Année	N	Moyenne	Indice
6.500	48	566	572	1866 ..	491	18.950	102
7.000	91	518	522	1906 ..	643	»	104
8.500	61	427	416	1911 ..	671	22.700	106
10.000	95	366	346	1921 (A)	673	22.950	104
12.500	45	271	269	1921 (B)	711	22.650	99
15.000	65	226	219	1926 ..	795	22.200	99
20.000	68	161	157	(A) 87 départements.			
30.000	43	93	97	(B) 90 »			
50.000	16	50	50				
70.000	17	34	31				
100.000	12	17	18				
200.000	5	5	6				

N désigne le nombre des communes qui dépassent *x* habitants; *n* correspond à chaque tranche.

1. On pourrait en déduire que, dans la France, Paris a une importance un peu exceptionnelle.

§ 4. Les grandes villes du monde satisfont aussi à la loi, comme le montre le tableau LIX. En 1900, l'inégalité est plus forte aux Etats-Unis qu'en Europe, mais depuis la guerre les indices se sont rejoints, chacun d'eux évoluant en sens inverse. Ce fait pourrait faire penser que les conditions de peuplement urbain sont devenues les mêmes en Europe et aux Etats-Unis.

Tableau LIX. — Villes de plus de 100.000 habitants.

EUROPE 1927			Formule :			
			$z = 0,94 \log (\quad - 100\ 000 - 1,81$			
x milliers	N observé	N calculé		Année	N	Indice
100	210	210	Europe	1850	47	88
125	162	166		1910	179	97
150	139	131		1920	201	99
175	118	115		1927	210	106
200	100	103	Etats-Unis ..	1900	36	138
250	78	81		1920	68	102
300	59	54		1927	80	101
400	51	47				
500	37	41				
750	19	20				
1.000	9	14				

N désigne le nombre des villes dépassant x milliers d'habitants.

§ 5. Les mêmes raisonnements s'appliqueraient sans grand changement aux statistiques donnant la répartition des familles suivant le nombre d'enfants.

Il est donc intéressant de rechercher si la formule s'applique encore.

De 1896 à 1911 le recensement général était accompagné d'une statistique des familles. En 1921 la S. G. F. n'a pu dépouiller les bulletins individuels, faute de moyens et de personnel. En 1926 le Parlement ayant voté les

crédits nécessaires, le dépouillement a pu être fait et M. Huber, le directeur de la S. G. F., a rendu compte dans le *Bulletin* de cet organisme (octobre 1929, p. 87) des premiers résultats correspondant à un ensemble de 11 départements totalisant 3.330.000 habitants.

Cet article compare constamment les distributions diverses des groupes familiaux suivant le nombre des enfants par famille.

La formule de l'effet proportionnel s'applique bien. Le tableau LX est relatif à la répartition de toutes les

Tableau LX. — Répartition pour 10 000 des familles suivant le nombre des enfants vivants en 1926
France 11 dép.

N désigne le nombre des familles ayant au moins x enfants

Nombre d'enfants X	familles ayant au moins : x enfants N	
	observé	calculé
0	10.000	10.000
1	8.458	8.477
2	5.414	5.400
3	2.961	3.030
4	1.620	1.637
5	904	885
6	499	486
7	270	270
8 et plus	143	156

Formule d'ajustement $z = 3,033 \log (x + 0,55) - 1,303$.

Indice d'inégalité 33

familles des onze départements d'après le nombre de leurs enfants vivants en 1926.

La recherche de la formule se fait par les méthodes habituelles, il est à peine besoin de faire remarquer que nous remplaçons une fonction discontinue « en escalier », par une fonction continue. Il n'y a là aucune difficulté, cepen-

dant il n'est plus possible de calculer les moyennes sans précaution. Ainsi pour trouver avec la loi le nombre des familles ayant 5 enfants vivants, il faut faire varier x de 5 à 6, etc...

On voit que l'approximation¹ est largement suffisante pour que l'on puisse parler de la formule de l'effet proportionnel et utiliser l'indice pour les comparaisons. On peut remarquer que cet indice se rapproche de celui des salaires et non de celui des revenus.

Comme nous l'avons dit, on ne peut pas utiliser la formule pour calculer les moyennes, mais les chiffres permettent une vérification presque immédiate. Si nous additionnons les chiffres (0.000 exclus), nous avons le nombre total des enfants des dix mille familles, les enfants au delà du huitième n'étant pas comptés. Cela donne : observé 20.269 ; calculé 20.341. L'erreur $\frac{1}{2}$ % est faible.

Nous n'avons pas l'intention ici de reprendre l'étude très complète de M. Huber au moyen de notre indice. Nous voulions simplement signaler brièvement une nouvelle application².

La figure XII représente les distributions des familles suivant la situation professionnelle de leur chef. Dans le tableau donné par M. Huber³, nous avons pris les deux répartitions les plus éloignées, celle des chefs d'établissement et celles des employés. Les points sont bien alignés, ce qui montre la loi et les inégalités ne sont pas très différentes puisque les droites divergent peu : 29 pour les em-

1. Les chiffres observés proviennent de l'article de M. Huber (*Bulletin S. G. F.*, « *Statistiques des familles en 1926* », XIX, 90).

2. Ainsi la même distribution pour 1911 conduit à la formule :

$$z = 3,033 \log (x + 0,55) - 1,368.$$

Donc la moyenne des enfants par famille a varié sans que l'inégalité soit modifiée d'une manière perceptible.

3. *Bulletin S. G. F.*, XIX, 94.

ployés et 32 pour les patrons. Nous retrouvons la propriété caractéristique de l'inégalité, sa *stabilité*. Les moyennes sont ici très différentes : 1,46 et 2,25.

§ 6. Nous ne pouvons penser à surcharger cet exposé et nous devons borner ici les vérifications numériques de la formule.

Toutes les répartitions économiques semblent suivre la formule et cela exprime que les variations relatives $\frac{dx}{x-x_0}$ forment une distribution normale au sens de Laplace-Gauss (loi de l'effet proportionnel). Il ne faudrait pas penser que le domaine de la formule reste restreint aux sciences économiques. Il est probable qu'il faudrait alors généraliser la loi (et la formule) par une extension complète du raisonnement de Kapteyn. On verra dans l'exemple de la figure X111 (annexe), une répartition qui devient normale lorsqu'on considère la racine cubique de la variable. Il s'agit d'une statistique de poids d'un groupe humain¹. On peut admettre en première approximation que le poids varie comme le cube de la taille et on interprète ainsi très facilement le changement de variable utilisé pour rendre la répartition normale.

§ 7. Ceci nous montre peut-être pourquoi la loi de l'effet proportionnel suffit aussi largement en économie politique.

Comme nous l'a écrit M. Divisia, après notre article du *B. S. G. F.* « la loi linéaire perdait donc sa généralité et peut-être son intérêt dans les cas où l'on peut considérer à volonté, plusieurs éléments entre eux par une relation

1. Bowley (*Eléments de statistique*, p. 325), l'étudie comme exemple de la méthode des moments.

fonctionnelle. Tel n'est pas précisément le cas des phénomènes économiques où les relations fonctionnelles sont rares et où le carré d'un salaire, le cube d'un revenu... n'ont aucun sens et où, par suite une transformation fonctionnelle qui transformerait une distribution quelconque en une distribution de Laplace ne pourrait être admise. »

§ 8. Il reste malheureusement un point que nous n'avons pu éclaircir. Quel est dans la formule $z = \text{alog}(x - x_0) + b$, la signification de x_0 ? Mathématiquement, c'est très simple, x_0 est la limite inférieure de x . Il est juste de reconnaître que pour beaucoup de distributions, x_0 a bien cette signification¹. Le lecteur l'aura remarqué. Mais nous avons vu, pour les revenus par exemple, qu'il était impossible de s'en tenir à cette interprétation. Il est nécessaire pour que la formule s'applique, de choisir la valeur de cette constante. Elle n'est pas sensible, en ce sens qu'il est inutile de calculer x_0 avec précision. Mais cela suffit pour supprimer toute interprétation de la constante. Nous n'avons, en effet, rien tiré de l'inspection des valeurs de x_0 déterminées expérimentalement.

1. Chaque fois que la variable x a une signification élémentaire et ne paraît pas résulter d'une somme, x_0 est nul. Exemples : le salaire, le profit, le chiffre d'affaires, le nombre d'enfants par famille, etc. Au contraire le revenu total résulte de la sommation des revenus élémentaires.

CONCLUSION

Quels que soient, l'époque ou le lieu des répartitions économiques que nous avons étudiées, qu'elles ressortissent à l'étude des richesses, à celle des entreprises, etc... nous avons donné une formule qui les représente, avec une fidélité remarquable, dans des intervalles très étendus.

Cette formule permet de définir mathématiquement un indice de l'inégalité de ces répartitions, indice qui généralise ceux que l'on avait proposés jusqu'ici et permet de faire concourir toute la répartition à sa détermination.

Cet indice nous a ainsi permis d'étudier d'une manière précise l'évolution des *inégalités économiques*, de déterminer les variations de concentration industrielle ou de répartition des biens. Nous avons ainsi pu démontrer que les revenus et la fortune étaient distribués entre les hommes avec la même inégalité *depuis près de cinq siècles* et qu'ainsi toutes les conquêtes économiques ou sociales étaient restées sans influence sensible sur elle. Nous avons vu encore que la *concentration industrielle définie comme l'inégalité de répartition des entreprises suivant leur personnel* variait peu pour un groupe de nature déterminée, d'un pays à l'autre et d'un recensement à l'autre. Le développement du machinisme et du capitalisme a agi, non sur la concentration, mais sur l'importance moyenne de chaque entreprise.

Il est même étonnant de voir l'inégalité rester plus stable que toutes les autres caractéristiques d'une répartition économique, la moyenne par exemple. A peine peut-on mettre en évidence son mouvement cyclique relié à celui des affaires en général. Nous l'avons fait cependant.

Cette formule qui se vérifie d'une manière aussi générale et qui a de telles conséquences doit pouvoir s'interpréter¹. La distribution des revenus, et toutes les autres sont ramenées par la loi de l'effet proportionnel à la loi célèbre de Laplace et la courbe qui les représente devient une courbe en cloche. Il suffit de considérer non les variations *absolues*, mais les variations *relatives*. Les répartitions économiques ne semblent plus singulières comme l'avait fait croire un moment la loi de Pareto. Leur explication est simple et générale.

1. « Pareto's celebrated income curve is perhaps to be explained on this principle ». Edgeworth, *Journal of the Royal Statistical Society* Vol, 87, 1924, p. 571. Nous remercions vivement M. Darmois qui a eu l'amabilité de nous communiquer cette citation.

SOMMAIRE DES ANNEXES

ANNEXES

I. — *La loi de l'effet proportionnel.*

Toutes les répartitions peuvent se ramener à une répartition normale, par un changement convenable de variable.

A l'Economie politique suffit le changement logarithmique. C'est la loi de l'effet proportionnel.

Formules de la médiane, de la moyenne du mode. Relation entre les trois caractéristiques. $2A + M_0 = M$. 3.

Formules des quartiles et de l'asymétrie.

Les moyennes des tranches, les distributions de même moyenne.

Rattachement aux types de Pearson, la formule de l'effet proportionnel est du type VI, les limites sont III et V. D'où l'interprétation des résultats de M. March.

Rattachement aux indices de M. Mourre. Les rapports d'inégalité principal et secondaire.

Notions sur la construction de la table utilisée.

II. — *Le test de Pearson.*

Formule donnant la probabilité d'obtenir la distribution observée, l'ajustement étant supposé parfait. Elle suppose l'emploi de la formule binomiale, de celle de Stirling et l'approximation de Laplace-Gauss.

Probabilité de l'ajustement. Le calcul de Pearson et l'hypothèse de continuité.

Conclusion, l'emploi est judicieux si la distribution résulte d'une épreuve et si les intervalles extrêmes sont petits.

ANNEXES

Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre.
(Platon).

I. La loi de l'effet proportionnel

§ 1. On peut toujours ramener une répartition asymétrique à une loi normale en déterminant une fonction $z(x)$ dont la répartition est normale¹.

En effet, soit $p(x) dx$ la fréquence élémentaire et $P(x)$ la probabilité ou la fréquence des observations supérieures à x on a

$$p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz$$

$$\text{et } P(x) = \int_x^{+\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2} dz = F(z)$$

La table qui se trouve à la fin de ce volume donne z en fonction de P et inversement P en fonction de z .

Les distributions statistiques donnent les valeurs de P

1. Ce travail a été fait sous l'influence de la citation de Kapteyn faite par Jordan dans son *Traité de Statistique mathématique*. M. G. Darmais a eu l'amabilité de nous signaler que ces répartitions ont été étudiées théoriquement par Wicksell, professeur à Lund. Celui-ci s'aperçut plus tard que Kapteyn les avait connues. Wicksell les a étendues au cas de plusieurs variables. Nous n'avons pu nous procurer à temps les travaux de Wicksell qui, parus dans les *Middelanders* de l'Observatoire de Lund, se trouveraient à l'Observatoire de Paris. L'esprit très particulier dans lequel nous avons utilisé ces répartitions ne nous fait pas croire qu'il y ait double emploi entre nos calculs et les siens. M. Darmais nous a écrit en octobre 1930 qu'il avait signalé rapidement ces répartitions, il y a deux ans, à l'Institut Poincaré, mais qu'il « n'avait pas d'indications de la richesse de cette idée pour les statistiques économiques ». Nous le remercions vivement ici de son appréciation de nos travaux.

correspondant à certaines valeurs de x . On en déduit les valeurs de z . Si les points (x, z) sont en ligne droite, tout se passe comme si la distribution était normale (Chapitre IV, I^{re} partie).

Sinon toute fonction $z(x)$ dont la courbe représentative passe par les points marqués, rend la distribution normale par le changement de variables x en z .

§ 2. A priori, toute fonction $z(x)$ peut se présenter, mais nous avons vu par de nombreux exemples qu'en Économie politique¹ toutes les répartitions deviennent normales par un changement logarithmique

$$z = a \log (x - x_0) + b.$$

Ceci correspond élémentairement à un mécanisme à effet proportionnel (Chapitre V, Partie I). On a, en effet

$$dz = a \log e \frac{dx}{x - x_0}$$

La variable x varie donc proportionnellement à $x - x_0$, le graphique, $\log (x - x_0)$, z sera une ligne droite. Telle est la propriété que nous avons constamment utilisée.

§ 3. Calculons les caractéristiques principales de la distribution rendue normale par ce changement logarithmique de variable.

Médiane M, elle correspond à $z = 0$ donc $\log (M - x_0) = -\frac{b}{a}$

Moyenne A, on doit calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)xdx$ un calcul

1. Comme nous l'avons exposé, la raison en est peut-être dans la nature même des phénomènes économiques où les relations fonctionnelles sont rares et où le carré ou le cube d'un salaire n'ont pas de sens. Au contraire, en démographie, on trouvera pour certains phénomènes des relations polynomiales. La répartition des tailles est normale, celle des poids ne l'est pas, mais on peut la rendre normale par la transformation.:

$$z = ax^{\frac{1}{3}} + b \text{ (figure XIII).}$$

Il est en effet naturel d'admettre que le poids varie, au moins en première approximation comme le cube de la taille.

2. Nous utilisons en effet le logarithme décimal.

simple donne : $\log (A \cdot x_0) = + \frac{1}{4a^2 \log e} - \frac{b}{a}$

$$\text{Mode } M_0 \text{ puisque } p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{dz}{dx}$$

M_0 sera donné par la racine de $z'' - 2z z'^2 = 0$

$$\text{d'où } z = - \frac{1}{2a \log e} \text{ et } \log (M_0 - x_0) = - \frac{1}{2a^2 \log e} - \frac{b}{a}$$

Nous poserons pour simplifier l'écriture

$$A' = A - x_0; \quad M' = M - x_0; \quad M'_0 = M_0 - x_0$$

§ 4. En développant en série on a successivement

$$\frac{A'}{M'} = e^{+\frac{1}{4a^2 \log e}} = 1 + \frac{1}{4a^2 \log^2 e} + \frac{1}{8a^4 \log^4 e}$$

$$\frac{M'_0}{M'} = e^{-\frac{1}{2a^2 \log e}} = 1 - \frac{1}{2a^2 \log^2 e} + \frac{1}{8a^4 \log^4 e}$$

$$\text{d'où la relation simple } \frac{2A' + M'_0}{M'} = 3 + \frac{5,25}{a^4} + \dots$$

Si a est assez grand (pour les salaires il dépasse 4), on aura la relation approchée au quatrième ordre près

$$2A + M_0 = 3M$$

L'établissement de cette relation est très important, car une relation, connue empiriquement depuis longtemps, est ainsi retrouvée théoriquement.

La relation rigoureuse est $A'^2 M'_0 = M'^3$

§ 5. Les *quartiles* correspondent aux valeurs de z égales à l'écart probable $r = 0,47693$

$$\text{On a donc } \log Q'_1 = - \frac{r+b}{a} \text{ d'où } Q'_1 Q'_3 = M'^2.$$

$$\log Q'_3 = \frac{r-b}{a}$$

On en déduit les relations que nous avons souvent utilisées $\left(C = \frac{100}{a}\right)$

$$\log \frac{Q'_3}{Q'_1} = \frac{2r}{a} = \frac{C}{105} \text{ et } \frac{Q_3 - Q_1}{M'} = 2 \operatorname{sh} \frac{r}{a \log e}$$

dont une forme souvent très approchée est $C = 45,5 \frac{Q_3 - Q_1}{M}$

On prend parfois comme mesure de la *dissymétrie* le rapport $S = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}$ on aura $S = 2 \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u}$ avec $u = \frac{r}{a \log e}$ ce qui donne la formule approchée au troisième ordre :

$S = \frac{r}{a \log e}$ Cette formule ne peut guère servir, car S est très mal déterminé par les observations, en général.

§ 6. *Les moyennes par tranches.* On a souvent besoin de connaître la moyenne M_i de x dans un intervalle x_i, x_j .

On a, par un calcul simple $\int_{x_i}^{x_j} x.p(x)dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_i}^{z_j} x.e^{-z^2} dz = x_0 \left(F(z_i) - R(z_j) \right) + A' \left(R(z_i) - R(z_j) \right)$$

avec $z_i = z_i - \frac{1}{2a \log e}$ et de même pour z_j

$$\text{On en tire } M_i = M_i - x_0 = A' \frac{R(z_i) - R(z_j)}{R(z_i) - F(z_j)}$$

On retrouve A en prenant les limites infinies.

§ 7. *Les distributions de même moyenne.* Une répartition est caractérisée par trois nombres, N , total des mesures, A et le paramètre définissant l'inégalité a ou C . Cherchons l'enveloppe des droites représentatives quand a varie, A' restant constant.

On a $z = a \log (x - x_0) + b$ et $\log A' = \frac{1}{4a^2 \log e} - \frac{b}{a}$

En éliminant b , et en cherchant l'enveloppe, on trouve
a courbe

$$z^2 = \frac{1}{\log e} \log. \frac{(x - x_0)}{A'}$$

parabole de grandeur constante dont le sommet est sur l'axe des logarithmes au point représentant la moyenne, on a ainsi une construction géométrique simple pour obtenir la moyenne, à partir de la droite ajustée.

§ 8. Soit n le nombre d'observations entre deux valeurs de x , pM' et qM' , on a $n = R(a \log q) - R(a \log p)$

Supposons p et q fixes, ce nombre ne dépend que de a , ou de C , l'indice d'inégalité.

$$\text{De plus } \frac{dn}{da} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-a^2 \log^2 p} \log p - e^{-a^2 \log^2 q} \log q \right)$$

On voit aisément que dès que z est plus grand que $1/2$, n décroît et inversement.

En d'autres termes, quand l'inégalité croît (ou que a décroît) les quartiles extrêmes se remplissent au profit des deux quartiles centraux. Ceci correspond bien à la notion courante d'inégalité.

§ 9. Rattachement aux types de Pearson

On a $m_n = \int_{-\infty}^{x_0} (x - A)^n p(x) dx$, leur calcul est donc ramené à celui des intégrales connues du type de Laplace. On obtient ainsi successivement en posant $K = e^{\frac{1}{4a^2 \log^2 e}}$

$$m_0 = 1$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = M^2 (K^2 - 1) K^2; \text{ d'où } B_1 = (K^2 - 1) (K^2 + 2)^2$$

asymétrie

$$m^3 = M^3 (K^2 - 1)^2 K^3 (K^2 + 2) \text{ d'où}$$

$$B^2 = (K^8 + 2K^6 + 3K^4 - 3) \text{ voussure}$$

$$m^4 = M^4 (K^2 - 1)^2 K^4 (K^8 + 2K^6 + 3K^4 - 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 > 0 \\ B_2 > 3 \text{ puisque } K > 1 \end{array} \right.$$

Le paramètre X de Pearson (voyez chapitre III) devient

$$X = \frac{(K^2 + 2)^2 (K^4 + 2K^2 + 3)^2}{4(4K^4 + 5K^2 + 3)(2K^2 + 1)} \text{ positif.}$$

Enfin

$$\frac{dX}{XdK} = \left(\frac{4K}{K^2 + 2} - \frac{4K}{K^2 + 3} \right) + \left(\frac{6K^3}{2K^4 + 4K^2 + 6} - \frac{16K^3}{4K^4 + 5K^2 + 3} \right)$$

Chaque parenthèse est positive, car K est certainement supérieur à l'unité, dont X croît avec K, c'est-à-dire avec C.

Or pour $K = 1$, $X = 1,25$; X est donc supérieur à l'unité et par suite toutes les distributions sont du type VI de Pearson.

Lorsque K est infini, on obtient le type III et non le type de Gauss, or M. March dans ses études du J. S. S. P. (1898, p. 193 et 1962, p. 260) a utilisé ce type pour les revenus. Pour ceux-ci, a oscille autour de 1, ce qui donne $K = 4$ et $X = 177$. On a donc pratiquement le type III. Le choix de M. March est expliqué. Il faut remarquer que c'est presque la seconde loi de Pareto. Notre formule est donc reliée aussi à celles du célèbre économiste.

Au contraire, pour les salaires, a atteint facilement 5, d'où $K = 1,05$ et $X = 1,55$. On est alors voisin du type V de Pearson.

Tout ceci explique que l'on ait pu obtenir des résultats avec la méthode des moments.

§ 10. La théorie des différences moyennes de Gini se relie à l'écart quadratique, comme nous l'avons vu. Celui-ci a pour carré $K^2 (K - 1)$, il ne dépend donc que de G .

§ 11. **Rattachement aux indices de M. Mourre.** Tout d'abord, le *rapport de Pareto* qui en est la base est purement et simplement le pourcentage $P(x)$ du nombre des individus qui ont un revenu supérieur à x par rapport au nombre total étudié, c'est-à-dire $R(z)$ ou $R(\text{alog } x' + b)$.

Nous avons posé $x' = x - x_0$ pour simplifier l'écriture.

Comment varie $P(x)$? se demande Pareto. Encore faut-il préciser les variables. Il est naturel de supposer que la médiane par exemple reste constante ou encore que x' reste proportionnel à cette médiane $x' = My$. On est alors ramené au problème étudié au n° 8, une des limites étant infinie. On voit que la variation avec G dépend de la position de x' par rapport aux quartiles (résultat inconnu de Pareto).

Le rapport d'inégalité de M. Mourre est (Chapitre VII, Partie I) le rapport de la somme des revenus dépassant le revenu moyen à la somme des revenus inférieurs au revenu moyen.

Or le revenu moyen correspond à une valeur de z telle que

$$z_0 = \text{alog } A' + b, \text{ et d'après le § 2; } z_0 = + \frac{1}{4 \text{alog } e}$$

le § 6 nous donne pour le rapport du total des revenus dépassant le revenu moyen au total des revenus, rapport

en liaison harmonique avec le rapport de M. Mourre :

$$s = \frac{A'}{A} - \frac{A' - 2x_0}{A} R(z_0)$$

Lorsque x_0 et A reste content et que seule l'inégalité varie on voit que s varie en sens inverse de $R(z_0)$ puisque toujours A observé est plus grand que $2x_0$. Or z_0 varie comme l'indice C .

Donc s varie comme C . *Donc le rapport d'inégalité de M. Mourre varie comme notre indice*¹.

M. Mourre a aussi considéré², des rapports d'inégalité secondaires. Dans l'intervalle de revenu, x_1 x_2 , il applique la définition précédente. Il montre ensuite, *empiriquement*, que ces rapports secondaires varient dans le même sens que le rapport principal. Le calcul, dans le cas de la loi de l'effet proportionnel est aussi théoriquement possible, mais, pas plus que M. Mourre, nous n'y entraînerons le lecteur. Indiquons seulement que le revenu moyen d'une tranche ($x_0 + pM'$, $x_0 + qM'$) est avec les notations du § 6 ($z_1 = \text{alog} q$; $z_2 = \text{alog} p$).

$$Mi = x_0 + A' \frac{I(z'_1) - R(z'_2)}{R(z_1) - R(z_2)}$$

§ 12. **Construction de la table.** Elle donne $R(z)$ en fonction de z

$$R(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-z^2} dz$$

1. Il est curieux de voir que cette propriété est inversée pour les répartitions où la moyenne serait plus petite que le double de la limite inférieure.

Il faut remarquer que le calcul de ce rapport est plus facile pour notre formule que celle de Pareto.

2. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1922, p. 215 et 1929, p. 285.

Pour les valeurs de z inférieures à 2,00 nous avons utilisé le tableau II de Jordan¹ donnant

$$\theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \quad \text{on a} \quad \theta(u) = 1 - 2R$$

Il donne, avec quatre décimales, les valeurs de R correspondant à z variant de centième en centième. Nous avons interpolé pour les millièmes de z , de façon à obtenir R de dix millième en dix millième, ce qui correspond au maximum de précision nécessaire. Le tableau a été dédoublé de manière à permettre une interpolation facile à vue. On lit les valeurs supérieures à $1/2$ en descendant, en montant celles inférieures. Le signe seul change, En effet

$$R(z) = 1 - R(-z)$$

Pour les valeurs supérieures à 2 qui se rencontrent fréquemment dans notre ouvrage, nous avons fait les calculs au moyen de la formule asymptotique² suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = 1 - \frac{e^{-x^2}}{2} \left(\frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_5}{x^5} \dots \right)$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad b_3 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \dots b_{2n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \sqrt{\pi}}$$

Nous avons ainsi obtenu les valeurs en note³ qui nous ont donné le reste de la table.

1. *Statistique mathématique*, p. 330.

2. Carvalle, *Calcul des probabilités*, et pour les propriétés des formules asymptotiques, Borel, *Séries divergentes*...

3.	$z = 2,40$	$10.000 R = 3,4545$
	2,50	2,0405
	2,60	1,1824
	2,70	0,6721
	2,80	0,37517
	2,90	0,20560
	3,00	0,11107
	3,10	0,058271
	3,20	0,030125
	3,30	0,0152671
	3,40	0,0076512

II. — Le test de Pearson

§ 13. L'école statistique de Pearson utilise une formule pour juger théoriquement de la qualité d'un ajustement théorique aux observations¹. Nous allons montrer comment on l'obtient de manière à pouvoir la juger.

1° L'ajustement donne pour n intervalles, les nombres a, b, c , de somme N . Dans une suite de N expériences, la probabilité d'obtenir a', b', c' , dans chaque intervalle ($a' + b' + \dots = N$) est donnée par une généralisation immédiate de la formule *binomiale*.

$$P = p^{a'} q^{b'} r^{c'} \dots \frac{n!}{a'! b'! \dots}$$

$p, q, r, \dots$ sont les quotients par N des nombres $a, b, c, \dots$

En transformant cette expression par la formule de *Stirling*² on obtient

$$P = \frac{1}{\sqrt{pqr\dots}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{nN})^{n-1}} \cdot P',$$

$$\text{avec } \log P' = -\frac{1}{2N} \left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \dots + \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \dots \right) + \frac{1}{6N^2} \left(\frac{x^3}{p^2} + q^2 + \dots \right)$$

x, y, z sont les écarts $a' - a, b' - b, \dots$

En remplaçant p, q, r , par leurs valeurs et en ne gardant que les termes du second degré, il reste :

$$P = \frac{\sqrt{N}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{abc\dots}} \cdot -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \dots \right)$$

1 Darmois, *Statistique mathématique*, p. 168; Elderton, *Frequency curves and correlation*, p. 141 (indications sommaires); Bowley, *Elements*, p. 564 et 594 (démonstration par induction). Il existe des tables dues à Elderton, *Biometrika*, I, p. 155. Jordan n'en parle pas.

2. Cette transformation est faite par Darmois ou dans Borel (*Traité de calcul de probabilités*, II, fasc. I, p. 35).

C'est la probabilité d'obtenir la distribution observée, l'ajustement étant supposé parfait.

§ 14. Quelles sont les approximations que nous avons dû faire ?

a) Nous avons généralisé la formule binomiale, nous avons donc admis un mécanisme analogue au suivant; dans une urne immense, il y a une infinité de boules, une proportion p est rouge, q , bleue, etc. On en tire N , on obtient a' rouges, b' bleues, etc.

Plusieurs objections sont possibles. N est souvent voisin du total des grandeurs existantes, en d'autres termes, le tirage épuise l'urne. Le nombre n est arbitrairement choisi, la formule est continue et il n'y a pas de sauts brusques de p à q .

b) Nous avons appliqué la formule de Stirling, or elle n'est en principe applicable que pour a' , grand. Il ne faut pas s'exagérer la valeur de cette objection, ainsi pour $a' = 1$, la formule donne 0, 925 pour $a' = 2$, 192¹.

c) Nous n'avons gardé que les termes en x^2 , exactement comme on obtient la loi de Laplace-Gauss en négligeant le coefficient d'asymétrie.

En résumé l'objection principale est que N est voisin de son maximum.

§ 15. 2^o La formule nous a montré que la somme $X^2 = \sum \frac{x^2}{a}$ était en relation avec l'exactitude de la correspondance, celle-ci est plus parfaite quand X est

1. L'erreur relative est $\frac{1}{12n}$ quand n est grand.

plus petit. Cette formule ne nous permet pas encore de donner la probabilité pour que l'ajustement soit exact.

Nous devons ajouter toutes les valeurs de P correspondant à tous les systèmes de valeurs des écarts supérieurs en valeur absolue à $x, y, z, \dots$ d'où une intégration $(n-1)$ uple. $\int \int \int^{(n-1)} P \, dx dy dz \dots$ avec la condition $x + y + z + \dots = 1$ l'élément différentiel comprend $n-1$ quantités $dx, dy, \dots$ Ceci revient à intégrer $e^{-\frac{x^2}{2}}$ dans un hyperplan à l'extérieur d'une sphère située dans un espace à n dimensions.

Pearson a effectué le calcul. On obtient

$$n \text{ impair : } P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} \left[1 + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{X^{n-3}}{2 \cdot 4 \cdot (n-3)} \right]$$

n pair :

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dX + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} \left[X + \frac{X^3}{3} + \dots + \frac{X^{n-3}}{1 \cdot 3 \cdot (n-3)} \right]$$

A défaut des tables spéciales, on calcule rapidement P quand n n'est pas trop grand, les valeurs de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ et de son intégrale se trouvant partout. Nous avons procédé ainsi.

On ne peut guère objecter à cette seconde partie de la démonstration que l'emploi de l'intégration là où x varie par unité. Cette objection perd beaucoup de sa force si $a, b, c, \dots$ sont grands ce qui est, en général, vrai sauf pour les intervalles extrêmes.

§ 16. Pour conclure, le test de Pearson s'applique sous les deux réserves suivantes :

1° Le groupe recensé doit être petit vis-à-vis de l'ensem-

ble choisi, autrement dit la distribution doit résulter d'une épreuve. Ceci exclut, en particulier, son emploi dans toutes les statistiques de revenu ou de concentration des entreprises des parties II et III de cet ouvrage.

2° Les intervalles extrêmes ont une importance suffisante.

Vu, le Doyen,
JOSSERAND.

Vu, le Président de la Thèse,
GONNARD.

Vu et permis d'imprimer :

Lyon, le 28 janvier 1931

Le Recteur de l'Académie de Lyon,

GHEUSI.

Fig. I

$$z = 0,247 \lambda - 0,220$$

Taux de paupérisme
dans un groupe d'Unions
anglaises

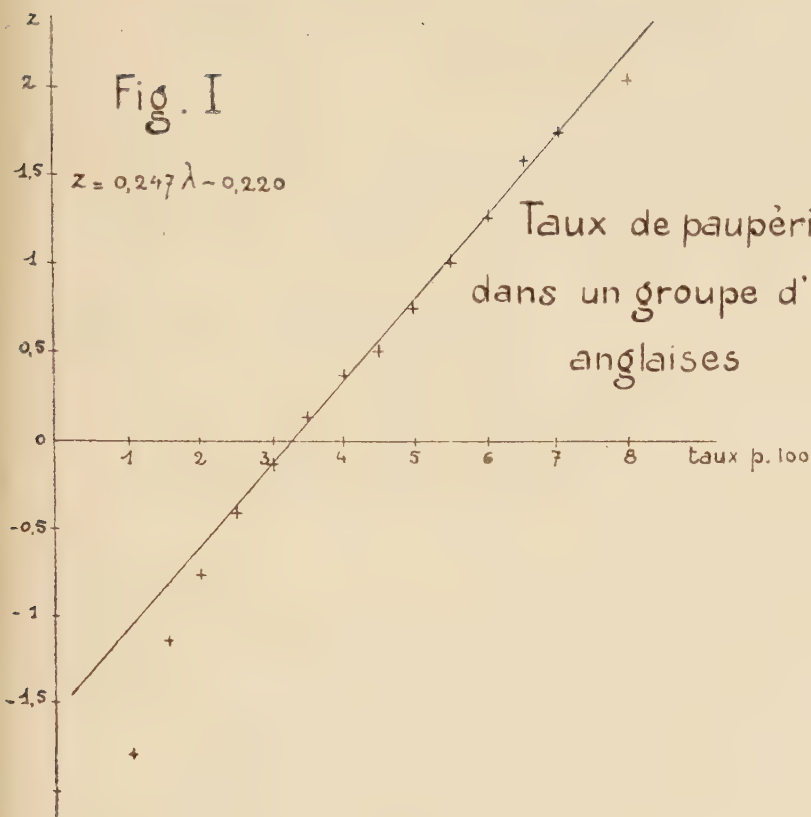


Fig II

$$y = 0,41 \lambda + 0,46$$

Salaires horaires
de terrassiers dans
diverses agglomérations
françaises

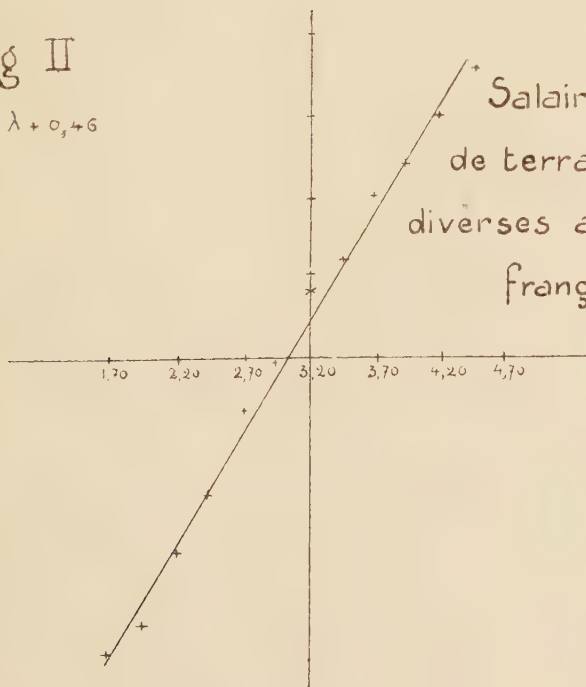


Fig III

$$Z = 5,5 \log x - 5,625$$

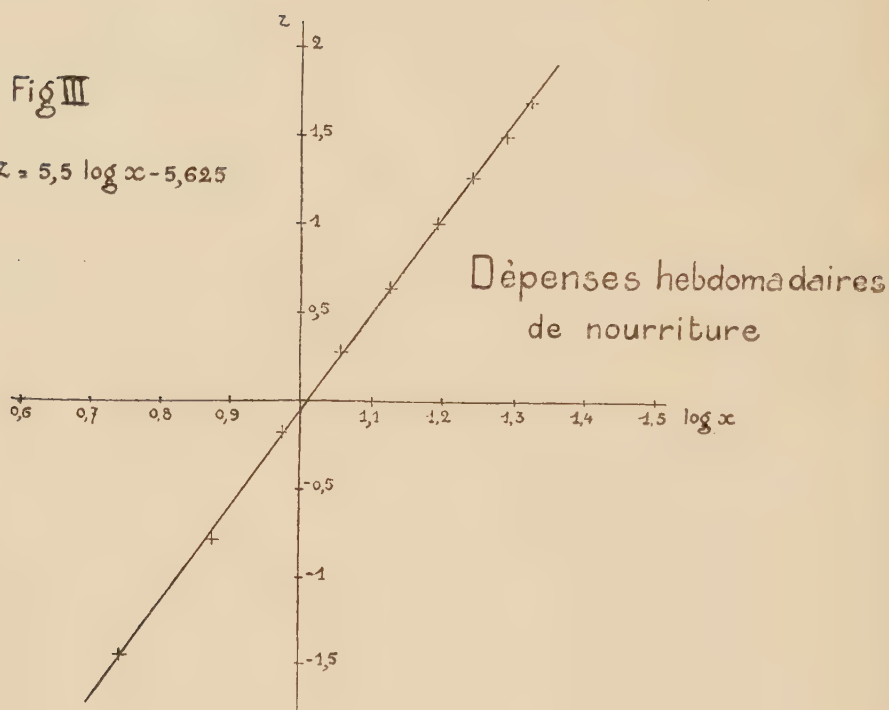
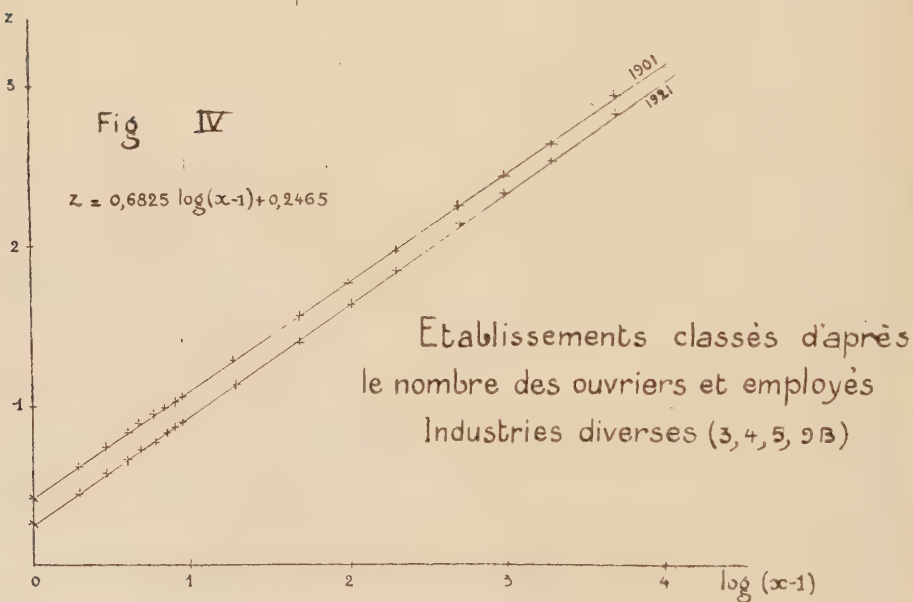
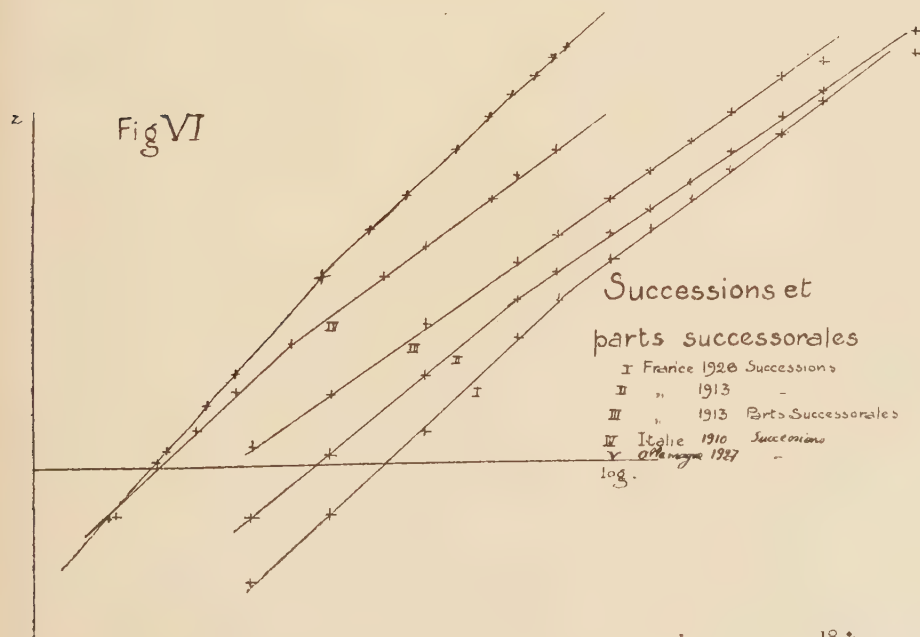
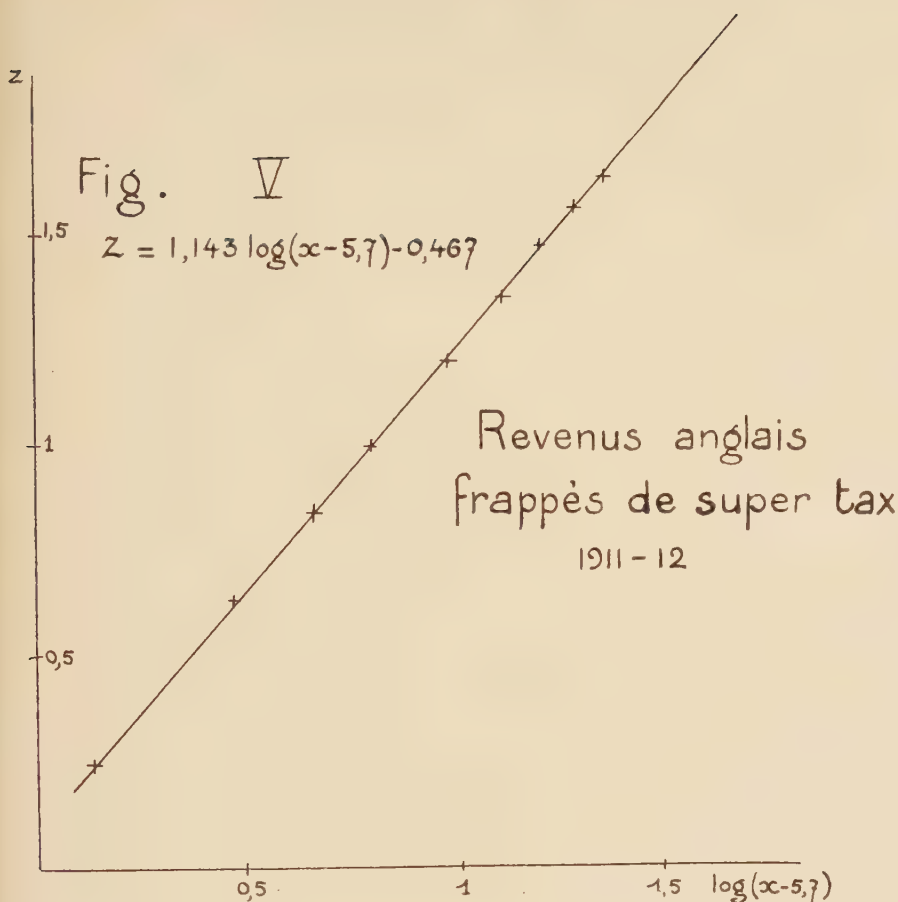


Fig IV

$$Z = 0,6825 \log(x-1) + 0,2465$$





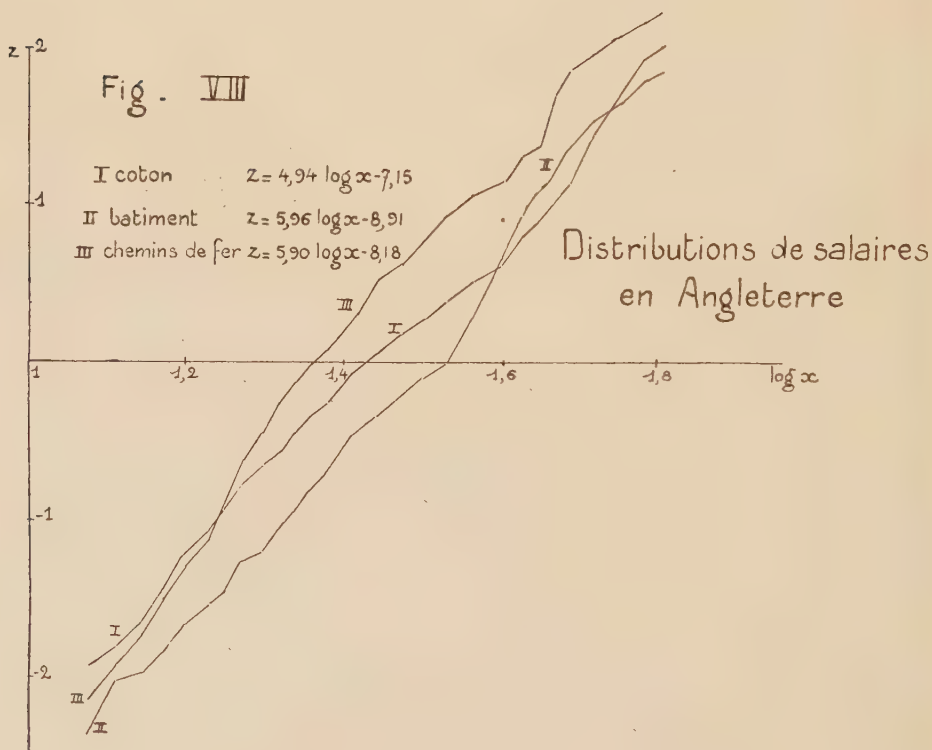
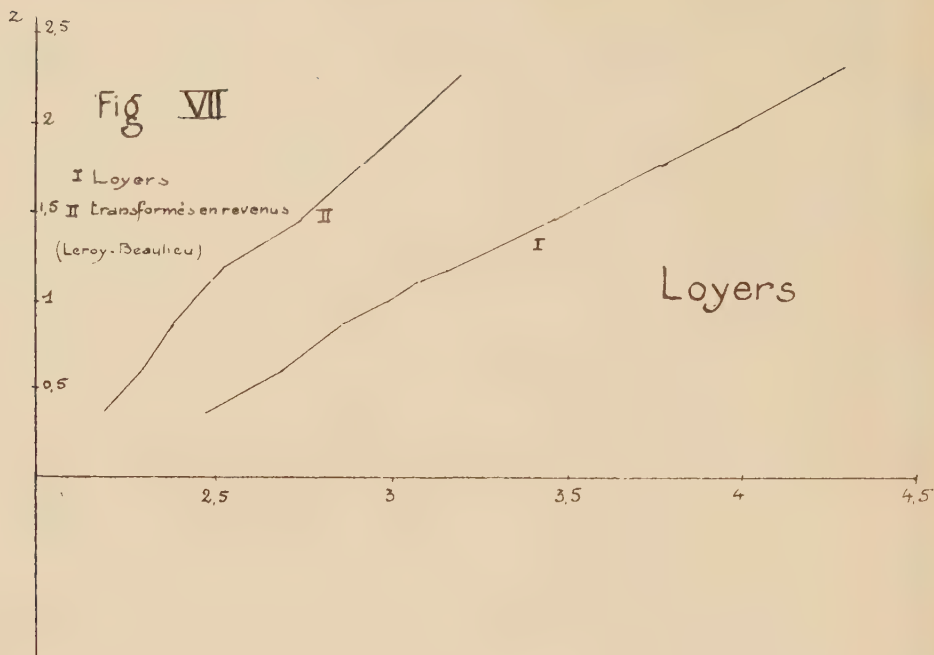
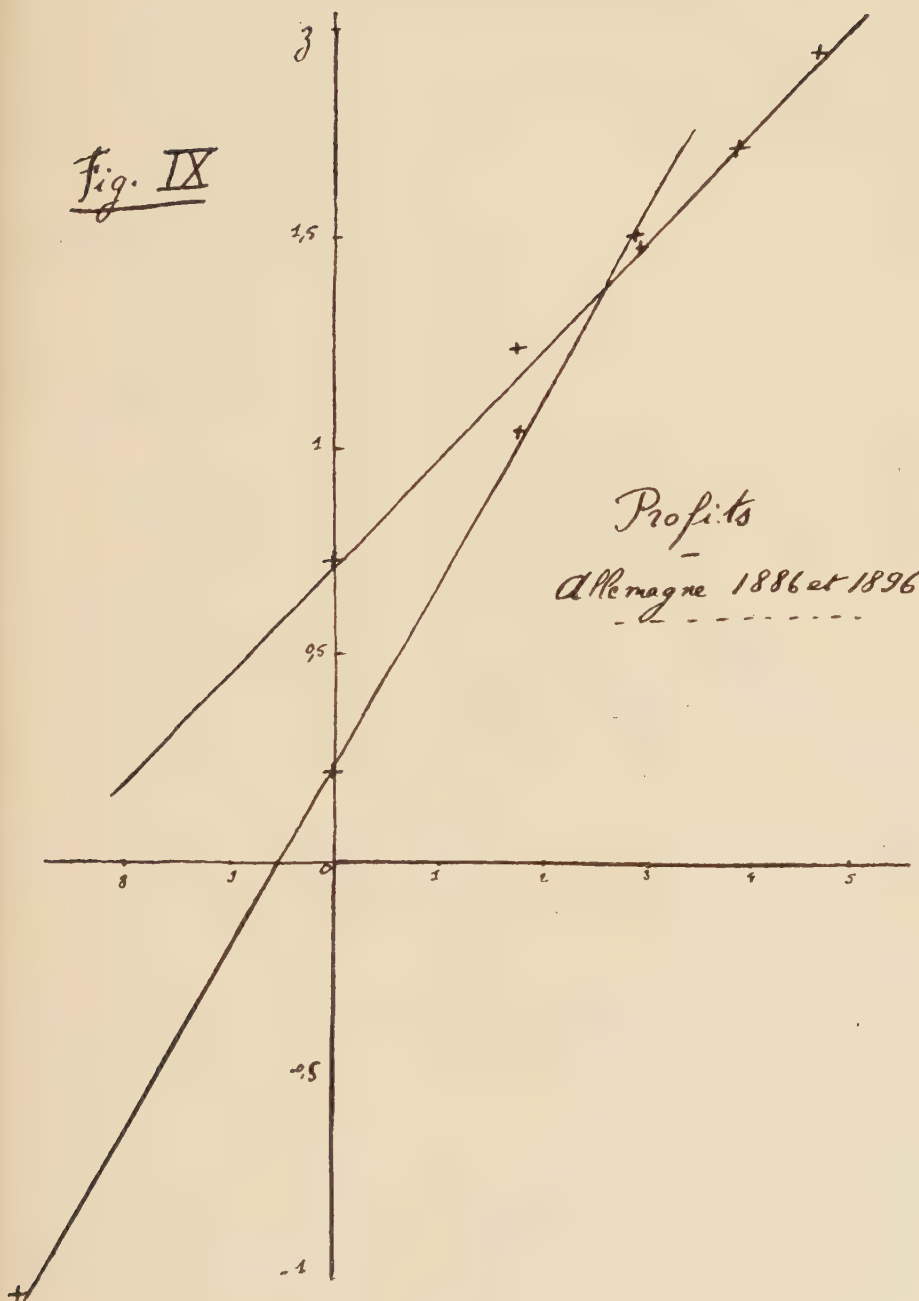
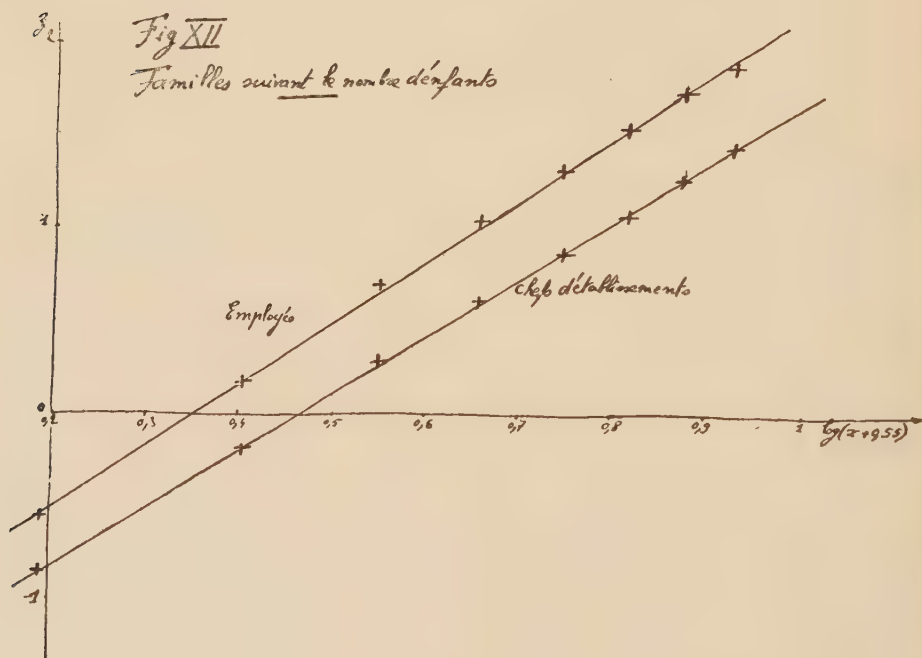
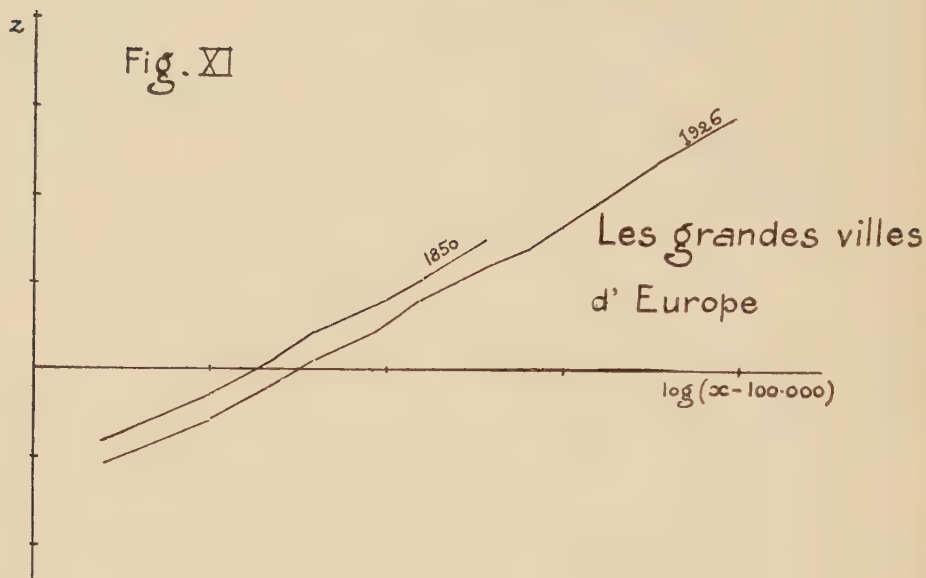
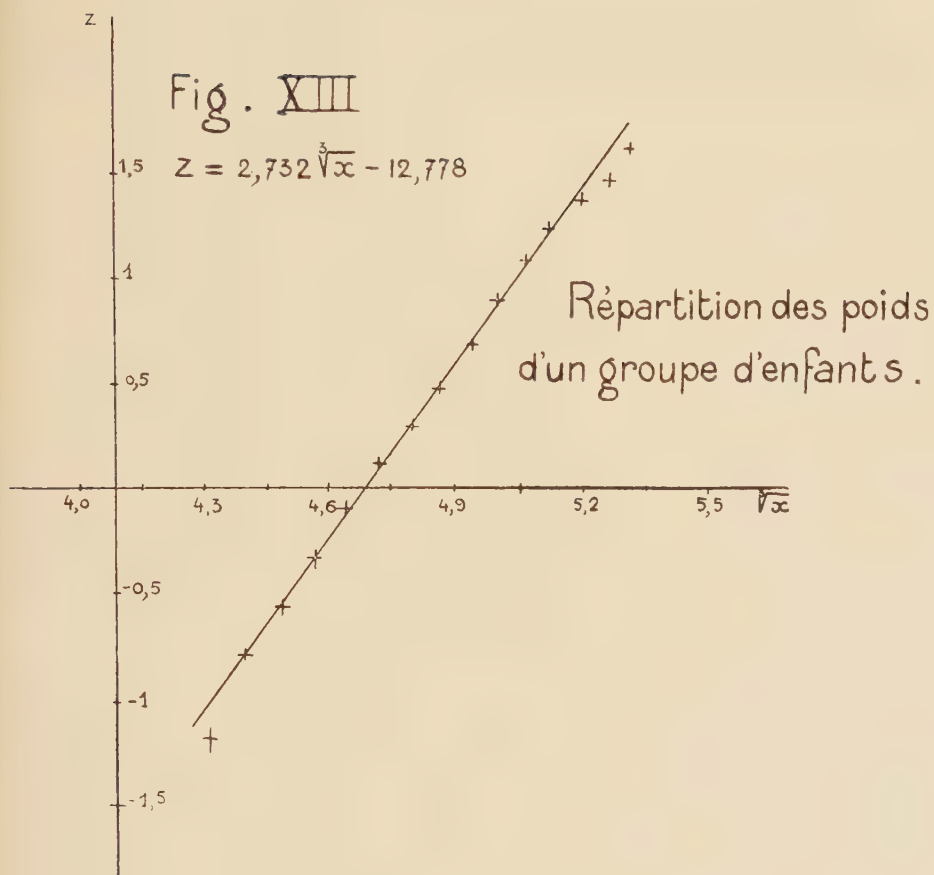


Fig. IX







R -	R +
998 9	2, 0 3 5
4 6	0 8 5
8	2, 1 5
999 0	9 1 9
1	2 3 3
2	2 6 5
3	2 9 5
4	3 7
5	4 0
6	4 2
7	4 5
8	4 8
9	5 1
0	5 4
1	5 7
2	6 0
3	6 4
4	6 8
5	7 0
6	7 2
7	7 5
8	7 7
9	8 4
0	8 7
1	9 0
2	9 1
3	9 6
4	9 8
5	9 8 9
6	3, 0 3
7	0 4
8	0 7
9	0 8
0	0 9
1	0 9 2
2	0 9 3
3	0 9 4
4	0 9 5
5	0 9 6
6	0 9 7
7	0 9 8
8	0 9 9
9	1 0 0
0	1 0 1
1	1 0 2
2	1 0 3
3	1 0 4
4	1 0 5
5	1 0 6
6	1 0 7
7	1 0 8
8	1 0 9
9	1 1 0
0	1 1 1
1	1 1 2
2	1 1 3
3	1 1 4
4	1 1 5
5	1 1 6
6	1 1 7
7	1 1 8
8	1 1 9
9	1 2 0
0	1 2 1
1	1 2 2
2	1 2 3
3	1 2 4
4	1 2 5
5	1 2 6
6	1 2 7
7	1 2 8
8	1 2 9
9	1 3 0
0	1 3 1
1	1 3 2
2	1 3 3
3	1 3 4
4	1 3 5
5	1 3 6
6	1 3 7
7	1 3 8
8	1 3 9
9	1 4 0
0	1 4 1
1	1 4 2
2	1 4 3
3	1 4 4
4	1 4 5
5	1 4 6
6	1 4 7
7	1 4 8
8	1 4 9
9	1 5 0
0	1 5 1
1	1 5 2
2	1 5 3
3	1 5 4
4	1 5 5
5	1 5 6
6	1 5 7
7	1 5 8
8	1 5 9
9	1 6 0
0	1 6 1
1	1 6 2
2	1 6 3
3	1 6 4
4	1 6 5
5	1 6 6
6	1 6 7
7	1 6 8
8	1 6 9
9	1 7 0
0	1 7 1
1	1 7 2
2	1 7 3
3	1 7 4
4	1 7 5
5	1 7 6
6	1 7 7
7	1 7 8
8	1 7 9
9	1 8 0
0	1 8 1
1	1 8 2
2	1 8 3
3	1 8 4
4	1 8 5
5	1 8 6
6	1 8 7
7	1 8 8
8	1 8 9
9	1 9 0
0	1 9 1
1	1 9 2
2	1 9 3
3	1 9 4
4	1 9 5
5	1 9 6
6	1 9 7
7	1 9 8
8	1 9 9
9	2 0 0
0	2 0 1
1	2 0 2
2	2 0 3
3	2 0 4
4	2 0 5
5	2 0 6
6	2 0 7
7	2 0 8
8	2 0 9
9	2 1 0
0	2 1 1
1	2 1 2
2	2 1 3
3	2 1 4
4	2 1 5
5	2 1 6
6	2 1 7
7	2 1 8
8	2 1 9
9	2 2 0
0	2 2 1
1	2 2 2
2	2 2 3
3	2 2 4
4	2 2 5
5	2 2 6
6	2 2 7
7	2 2 8
8	2 2 9
9	2 3 0
0	2 3 1
1	2 3 2
2	2 3 3
3	2 3 4
4	2 3 5
5	2 3 6
6	2 3 7
7	2 3 8
8	2 3 9
9	2 4 0
0	2 4 1
1	2 4 2
2	2 4 3
3	2 4 4
4	2 4 5
5	2 4 6
6	2 4 7
7	2 4 8
8	2 4 9
9	2 5 0
0	2 5 1
1	2 5 2
2	2 5 3
3	2 5 4
4	2 5 5
5	2 5 6
6	2 5 7
7	2 5 8
8	2 5 9
9	2 6 0
0	2 6 1
1	2 6 2
2	2 6 3
3	2 6 4
4	2 6 5
5	2 6 6
6	2 6 7
7	2 6 8
8	2 6 9
9	2 7 0
0	2 7 1
1	2 7 2
2	2 7 3
3	2 7 4
4	2 7 5
5	2 7 6
6	2 7 7
7	2 7 8
8	2 7 9
9	2 8 0
0	2 8 1
1	2 8 2
2	2 8 3
3	2 8 4
4	2 8 5
5	2 8 6
6	2 8 7
7	2 8 8
8	2 8 9
9	2 9 0
0	2 9 1
1	2 9 2
2	2 9 3
3	2 9 4
4	2 9 5
5	2 9 6
6	2 9 7
7	2 9 8
8	2 9 9
9	3 0 0
0	3 0 1
1	3 0 2
2	3 0 3
3	3 0 4
4	3 0 5
5	3 0 6
6	3 0 7
7	3 0 8
8	3 0 9
9	3 1 0
0	3 1 1
1	3 1 2
2	3 1 3
3	3 1 4
4	3 1 5
5	3 1 6
6	3 1 7
7	3 1 8
8	3 1 9
9	3 2 0
0	3 2 1
1	3 2 2
2	3 2 3
3	3 2 4
4	3 2 5
5	3 2 6
6	3 2 7
7	3 2 8
8	3 2 9
9	3 3 0
0	3 3 1
1	3 3 2
2	3 3 3
3	3 3 4
4	3 3 5
5	3 3 6
6	3 3 7
7	3 3 8
8	3 3 9
9	3 4 0
0	3 4 1
1	3 4 2
2	3 4 3
3	3 4 4
4	3 4 5
5	3 4 6
6	3 4 7
7	3 4 8
8	3 4 9
9	3 5 0
0	3 5 1
1	3 5 2
2	3 5 3
3	3 5 4
4	3 5 5
5	3 5 6
6	3 5 7
7	3 5 8
8	3 5 9
9	3 6 0
0	3 6 1
1	3 6 2
2	3 6 3
3	3 6 4
4	3 6 5
5	3 6 6
6	3 6 7
7	3 6 8
8	3 6 9
9	3 7 0
0	3 7 1
1	3 7 2
2	3 7 3
3	3 7 4
4	3 7 5
5	3 7 6
6	3 7 7
7	3 7 8
8	3 7 9
9	3 8 0
0	3 8 1
1	3 8 2
2	3 8 3
3	3 8 4
4	3 8 5
5	3 8 6
6	3 8 7
7	3 8 8
8	3 8 9
9	3 9 0
0	3 9 1
1	3 9 2
2	3 9 3
3	3 9 4
4	3 9 5
5	3 9 6
6	3 9 7
7	3 9 8
8	3 9 9
9	4 0 0
0	4 0 1
1	4 0 2
2	4 0 3
3	4 0 4
4	4 0 5
5	4 0 6
6	4 0 7
7	4 0 8
8	4 0 9
9	4 1 0
0	4 1 1
1	4 1 2
2	4 1 3
3	4 1 4
4	4 1 5
5	4 1 6
6	4 1 7
7	4 1 8
8	4 1 9
9	4 2 0
0	4 2 1
1	4 2 2
2	4 2 3
3	4 2 4
4	4 2 5
5	4 2 6
6	4 2 7
7	4 2 8
8	4 2 9
9	4 3 0
0	4 3 1
1	4 3 2
2	4 3 3
3	4 3 4
4	4 3 5
5	4 3 6
6	4 3 7
7	4 3 8
8	4 3 9
9	4 4 0
0	4 4 1
1	4 4 2
2	4 4 3
3	4 4 4
4	4 4 5
5	4 4 6
6	4 4 7
7	4 4 8
8	4 4 9
9	4 5 0
0	4 5 1
1	4 5 2
2	4 5 3
3	4 5 4
4	4 5 5
5	4 5 6
6	4 5 7
7	4 5 8
8	4 5 9
9	4 6 0
0	4 6 1
1	4 6 2
2	4 6 3
3	4 6 4
4	4 6 5
5	4 6 6
6	4 6 7
7	4 6 8
8	4 6 9
9	4 7 0
0	4 7 1
1	4 7 2
2	4 7 3
3	4 7 4
4	4 7 5
5	4 7 6
6	4 7 7
7	4 7 8
8	4 7 9
9	4 8 0
0	4 8 1
1	4 8 2
2	4 8 3
3	4 8 4
4	4 8 5
5	4 8 6
6	4 8 7
7	4 8 8
8	4 8 9
9	4 9 0
0	4 9 1
1	4 9 2
2	4 9 3
3	4 9 4
4	4 9 5
5	4 9 6
6	4 9 7
7	4 9 8
8	4 9 9
9	5 0 0
0	5 0 1
1	5 0 2
2	5 0 3
3	5 0 4
4	5 0 5
5	5 0 6
6	5 0 7
7	5 0 8
8	5 0 9
9	5 1 0
0	5 1 1
1	5 1 2
2	5 1 3
3	5 1 4
4	5 1 5
5	5 1 6
6	5 1 7
7	5 1 8
8	5 1 9
9	5 2 0
0	5 2 1
1	5 2 2
2	5 2 3
3	5 2 4
4	5 2 5
5	5 2 6
6	5 2 7
7	5 2 8
8	5 2 9
9	5 3 0
0	5 3 1
1	5 3 2
2	5 3 3
3	5 3 4
4	5 3 5
5	5 3 6
6	5 3 7
7	5 3 8
8	5 3 9
9	5 4 0
0	5 4 1
1	5 4 2
2	5 4 3
3	5 4 4
4	5 4 5
5	5 4 6
6	5 4 7
7	5 4 8
8	5 4 9
9	5 5 0
0	5 5 1
1	5 5 2
2	5 5 3
3	5 5 4
4	5 5 5
5	5 5 6
6	5 5 7
7	5 5 8
8	5 5 9
9	5 6 0
0	5 6 1
1	5 6 2
2	5 6 3
3	5 6 4
4	5 6 5
5	5 6 6
6	5 6 7
7	5 6 8
8	5 6 9
9	5 7 0
0	5 7 1
1	5 7 2
2	5 7 3
3	5 7 4
4	5 7 5
5	5 7 6
6	5 7 7
7	5 7 8
8	5 7 9
9	5 8 0
0	5 8 1
1	5 8 2
2	5 8 3
3	5 8 4
4	5 8 5
5	5 8 6
6	5 8 7
7	5 8 8
8	5 8 9
9	5 9 0
0	5 9 1
1	5 9 2
2	5 9 3
3	5 9 4
4	5 9 5
5	5 9 6
6	5 9 7
7	5 9 8
8	5 9 9
9	6 0 0
0	6 0 1
1	6 0 2
2	6 0 3
3	6 0 4
4	6 0 5
5	6 0 6
6	6 0 7
7	6 0 8
8	6 0 9
9	6 1 0
0	6 1 1
1	6 1 2
2</	

BIBLIOGRAPHIE

TRAITÉS GÉNÉRAUX DE STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

- AFTALION. — *Cours de statistique professé à la Faculté de droit de Paris en 1927-28.*
- BOREL. — *Traité du calcul des probabilités* (avec de nombreux collaborateurs), particulièrement. tome I, fasc. I, chapitre VI.
- BOWLEY. — *Eléments de statistique* (trad. française, 1929).
- DARMOIS. — *Statistique mathématique 1928* (préface de Mr Huber).
- ELDERTON. — *Frequency curves and correlation.*
- JORDAN. — *Statistique mathématique*, 1927.

Nous ne citons ici que les ouvrages que nous avons utilisés. On doit, pour la bibliographie générale, se reporter aux ouvrages précédents. (L'index bibliographique de l'ouvrage de Mr Darmois est très complet).

I. — ETUDES THÉORIQUES DES RÉPARTITIONS ET DE LEUR INÉGALITÉ

- ANSIAUX. — *Traité d'Economie politique* (trois volumes).
- BAXTER DUDLEY. — *National income and taxation of the United Kingdom.* Comptes-rendus de travaux de la 7^e session du congrès international de statistique de La Haye (seconde partie, p. 530), 1870.
- BOREL (E). — Allocution de présidence (*Société de statistique de Paris, J. S. S. P.*, 1922, p. 43).
- DESSIRIER. — Prévisions statistiques des mouvements de bourse (*J. S. S. P.*, 1928, p. 53).
- DUGÉ de BERNONVILLE. — Les répartitions de salaires et de revenus (*B. S. G. F.*, t. II, p. 400).

- Variations de prix en France depuis la stabilisation des changes (*B. S. G. F.*, XVIII, p. 432).
- DUNHAM JACKSON. — Définitions semblables de la médiane du mode et de différentes grandeurs statistiques (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 160-164).
- FRECHET. — Une généralisation de la formule de Pareto, (*B. I. I. S.* XXII, 3, p. 547).
- KAPTEYN. — *Skew frequency Curves in Biology and Statistics* Croningen, 1903.
- KIAER. — (Voir deuxième partie) nombreux mémoires dans le *B. I. I. S.* XVIII, 2, 119; XIX, 2, 102; XX, 2, 619.
- LEVY (P). — *Calcul des probabilités*, 1926.
- Sur quelques points relatifs à la théorie des erreurs (*Bulletin des sciences mathématiques*, janvier 1929).
- LOUTCHITCH. — *Des variations du taux de l'intérêt*, thèse, Paris, 1930.
- MARCH. — Etude des procédés d'ajustement *J. S. S. P.*, 1898, p. 205).
- La concentration dans les entreprises industrielles et commerciales (série d'études de MM. Fontaine, March, Rousiers..., 1913).
- Différences et corrélation en statistique (*J. S. S. P.*, 1928, p. 38).
- MOURRE. — (Voir deuxième partie) (*J. S. S. P.*, 1922, 215; 1929, 285).
- PARETO. — *Recueil de l'université de Lausanne*. La courbe de répartition des revenus (Genève, 1896).
- *Systèmes socialistes*, 1902 (tome II, p. 159 particulièrement).
- *Cours d'Economie politique*, 1897, t. II celui que nous avons pris comme base).
- PEARSON. — *The fundamental problem of practical statistics. Biometrika*, XVIII.
- SIMIONOV. — Observations à une communication de M. Mourre (*J. S. S. P.*, 1929, p. 301).
- WISHART. — Utilisation des courbes de Romanosky (*Biometrika*, XVIII).

II. — L'INÉGALITÉ DANS LA RÉPARTITION DES BIENS

- BAXTER DUDLEY. — *National Income and Taxation* (Voir 1^{re} partie).
- BENINI. — *Principii di statistica metodologica*.
- BERTILLON (Dr J.). — Statistique des successions en France et à l'étranger (*B. I. I. S.* XVIII, 2, 369 à 434).
- BOHMERT. — Sur la statistique des salaires (*B. I. I. S.* VI, 1, 171).
- BORCHT (Van der). — Article Aktiengesellschaft dans le *Dictionnaire d'Economie politique*, 1898, p. 191.
- BUCHER (K.) *Basels staatseinnahmen und steuerverteilung*, 1878-87.
- CANTELLI. — *Su le deduzione delle legi di frequenza* (*Metron*, 1, 3).
- CARVER (T.-N.). — *La répartition des richesses*, 1912.
- CHATELAIN. — Les successions déclarées en 1905, (*Revue politique et parlementaire*, 1907, p. 160).
- CHOGO ARIYASA. — Répartition du revenu au Japon (*B. I. I. S.*, XIX, 2, 188).
- COATES. — Incidence de l'Income tax. Rapport présenté au Committee on National dept. (Résumé dans *B. S. G. F.* XVIII, 293).
- DAVENANT. — *Essay of the probable methods of making the people gainers in the balance of travail*, 1699.
- DENIS (Hector). — Statistique des salaires en Belgique depuis 1870 (*B. I. I. S.* VI, 1, 73).
- DERMIETZEL. — *Statistische Untersuchungen über die Kapitalrente der grösseren Aktiengesellschaften von 1876-1902*.
- DUGE de BERNONVILLE. — Les répartitions de salaires et de revenus en divers pays (*B. S. G. F.*, 1913, t. 2, p. 433).
- EDGEWORTH. — Sur l'application du calcul des probabilités à la statistique (*B. I. I. S.*, XVIII, I, 220).
- ESSARS (des). — Les dépôts de titres à la Banque de France. (*J. S. S. P.*, 1897, p. 321).
- Application de la formule de Pareto (*J. S. S. P.*, 1902, p. 112).
- FAHLBECK (Pontus). — Les classes sociales (*B. I. I. S.*, XVIII, I, 189).
- FAURE (F.). — Rapport sur la contribution que peut apporter la Statistique financière à l'étude des phénomènes sociaux, politiques, économiques et juridiques (*B. I. I. S.*, XIV, 3, 20).

- FELLNER. — *Die Schätzung des Volkseinkommen* (B. I. I. S., XIV, 3, 109).
- FOVILLE (de). — La fortune française à l'étranger (*Revue politique et parlementaire*, 1902, p. 201).
- Evaluation de la fortune en France (*Economiste français*, 10 juillet 1880).
- FRECHET. — Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus (B. I. I. S., XXII, 3, 547).
- GIFFEN. — *The method of wages Statistics with Memorandum explaining* (B. I. I. S., II, 1, 177).
- GINI. — *Sul massima degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni* (*Metron* VIII, 3, 30).
- *Indici di concentrazione e di dipendenza. Biblioteca dell' Economista* 5^e série, vol. 120.
- *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri.* (*Atti del R. Inst. Venez.* XXIII, 1913, p. 14).
- GUYOT (Y.). — Evaluation de la fortune privée en France d'après les revenus fiscaux. (B. I. I. S., XIV, 3, 107).
- GUMBEL. — *Eine beziehung zwischen Fehlermassen* (*Metron*, VI, 2, 65).
- HARTUNG. — *Jahrbuch für Gesetzgebung* (Richesse à Augsbourg 1895).
- HENRY. — La mesure des capacités intellectuelles et artistiques (*Instituts Solvay*, 1906).
- HUBER. — Statistiques de salaires (B. I. I. S., XXII, 1, 153 et XXII, 2, 318).
- HUNCKE. — *Allgemeines statistischen Archiv.* 1907, p. 90.
- KIAER. — La répartition sociale des revenus (B. I. I. S., XV III, 2 119).
- Documents concernant la statistique internationale des revenus privés (B. I. I. S., XIX, 2, 103).
- La répartition sociale des revenus et fortunes privés. (B. I. I. S., XX, 2, 619). Voir aussi XX, 1, 166.
- LASSALLE. — Lettre ouverte au Comité central pour la convocation d'un congrès général des travailleurs allemands à Leipzig, 1863.
- LAVELEYE (de). — Rapport sur le revenu des propriétés foncières, 1850.
- LEROY-BEAULIEU. — *Essai sur la répartition des richesses et sur la tendance à une moindre inégalité des conditions*, Paris, 1897.

- Evaluation de la fortune d'après les statistiques successorales (*Economiste français*, 1^{er} août 1903).
- LESCURE. — Crises générales et périodiques de surproduction.
- LEVASSEUR. — Etudes sur le salaire en France depuis 35 ans (*Revue économique internationale*, 1905, 255).
- MACQUART. — Revision décennale du revenu net des propriétés bâties (*J. S. S. P.*, 1902, p. 418).
- MARCH. — Distributions de salaires, (*J. S. S. P.*, juin et juillet 1898.
— La méthode statistique (*Metron*, 1, 1, 22).
— Répartition des auteurs de successions d'après leur âge (*J. S. S. P.*, 1900, 38).
- METHORST. — Documents concernant la statistique internationale des revenus et fortunes privés (*B. I. I. S.*, XIX, 2, 863).
- MOURRE (baron). — Des variations de l'inégalité des revenus et du revenu moyen (*J. S. S. P.*, 1922, 215).
— La courbe des revenus (*J. S. S. P.*, 1929, 285).
- NATIONS (Société des). — Rapports sur la double imposition (février 1925).
— Avis de la Chambre de commerce internationale (1924).
— Rapports du comité financier (1923, 1928).
- NEYMARCK. — Le morcellement des valeurs mobilières (*J. S. S. P.*, 1903).
- NITSCHKE. — *Statistische Monatsschrift* (Autriche), 1912, IX.
- OTTOLENDI. — *I profitti industriali nella costituzione economica* (Torino, 1907).
- PARERO. — (Voir la première partie).
- PEROZZO LUIGI. — Calcul des variations en Statistique démographique (*B. I. I. S.*, XVIII, 1, 289).
- PERROUX. — *Le problème du profit*, thèse, 1926.
- REBOUD. — *Précis d'Economie politique* (partie. tome 2, chap. 2).
- R. ROY. — La Demande dans ses rapports avec la répartition des revenus (*Metron*, VIII, 3, 101).
- SAIBANTE. — *I profitti delle società per azioni e la concentrazione dei capitali industriali* (*Metron* VI, 1, 165).
- SCHLOSS. — La comparaison internationale des salaires des ouvriers (*B. I. I. S.*, XV, 2, 311).
- SCHONBERG. — *Finanzverhältnisse der Stadt Basel in 14 und 15 Jahrhundert*.
- SCHMOLLER. — *Die einkommen verteilung in alter und neuer Zeit* (*B. I. I. S.*, 1905, IX, I).

- SEAILLES (J.). — *La répartition des fortunes d'après les statistiques successorales en France*, thèse, 1909, Par s.
- SEERGEN. — *Die Verteilung der Güter der Schweiz*.
- SMART. — *La répartition du revenu national*, 1902.
- SMITH. — Documents concernant la répartition des revenus et fortunes privés (*B. I. I. S.*, XX, 22, 892).
- SOETBEER. — *Umfang und vertheilung des Volkseinkommens in Preusschen Staate*. (1872-78, Leipzig, 1879).
- STERNEGG (von Inama). — La statistique des salaires (*B. I. I. S.*, IX, 2, 174).
- TABOVICI. — *Die statistik der Einkommenverteilung*.
- TAKANO. — Etude sur le développement et la répartition du revenu national au Japon, basée sur les statistiques de l'impôt sur le revenu (*B. I. I. S.* XVIII, 1, 410).
- TRIVETT. — *Documents concernant la statistique internationale des revenus et fortunes privées* (*B. I. I. S.*, XIX, 2, 197).
- TROTABAS. — *Science et Législation financière*, 1929.
- TRUCHY. — Cours d'Economie politique.
- VARGHA (de). — Documents concernant la statistique internationale des revenus et fortunes privés (*B. I. I. S.*, XIX, 2, 146).
- VINCI (F.). — *Sui coefficienti di variabilita* (*Metron*, 1, 1, 62).
- WAGNER. — *Statistik des Volks-oder national einkommen und Vermögens* (*B. I. I. S.*, XIV, 3, 1).
- WALLON (D^r). — *Principes de psychologie appliquée*, 1930.
- WARMING. — *Nationalökonomisk Tidsschrift* (1907, 401).
- WURZBURGER. — *Zeitungsschrift des Königl. Sächsischen Bureau* 1904, II
— *Zur frage der Einkommenstatistik*, (*B. I. I. S.*, XX, 2, 797).

III. — LA RÉPARTITION DES HOMMES ENTRE LES ENTREPRISES.

- ANSIAUX. — *Traité d'economie politique* (particulièrement tome I, chap. IX).
- BERTILLON (J.). — Classement des professions dans les dénombremens de population (*B. I. I. S.* V, 252; *id.* VI, 263; *id.* VIII, 1, 240; *id.* IX, 2, 82).
- BOURGUIN. — *Les systèmes socialistes*.

- BOWLEY et FLUX. — Rapport à la 2^e section du Congrès de l'Institut international de Statistique, Le Caire, 1927-28.
- DERNIS. — *La concentration industrielle en Allemagne*, thèse, Paris, 1929.
- GUYOT (Y.). — La répartition des industries aux Etats-Unis en France et en Belgique (*B. I. I. S.*, XVII, 92).
- LEVASSEUR. — Rapport de la commission chargée d'étudier les conditions d'un recensement industriel, 1894.
- MARCH. — La population industrielle et les entreprises en Allemagne, Belgique, France, Etats-Unis d'après les recensements (*B. I. I. S.*, XV, 3, 152).
- Recensements industriels et statistiques du chômage (*B. I. I. S.*, XV, 2, 271).
 - Projet de répertoire technologique en trois langues des industries et des professions (*B. I. I. S.*, XVII, 119).
 - Classification des industries (*B. I. I. S.*, XXII, 2, 1 et XXII, 1, 52).
 - Introduction aux résultats statistiques du recensement des industries et professions de 1896 (tome I du recens.).
 - *La concentration dans les entreprises industrielles et commerciales* (en collaboration avec MM. Fontaine, Rousiers, Samazeuilh, Sayous, Veillet et Weiss) Alcan, 1913.
- MARSHALL. — *Principes d'Economie politique*.
- PERREAU. — *Cours d'Economie politique* (tome I, p. 205 et ss.).
- VILLE-CHABROLLE (de). — La concentration dans divers pays vers 1907 (*B. S. G. F.*, avril 1913, p. 283).
- Population active en Alsace-Lorraine (*B. S. G. F.*, avril 1905, p. 301).
 - Population active en France (*B. S. G. F.*, octobre 1925, p. 69).
 - Population active dans les dix départements libérés (*B. S. G. F.*, octobre 1926, p. 283).

IV. — APPLICATIONS DIVERSES DE LA FORMULE.

- HUBER. — Statistique des familles en 1926 (*B. S. G. F.*, janvier 1930, p. 90).
- LEVASSEUR. — La répartition de la race humaine (*B. I. I. S.*, XVIII 2, 57).

PÉRIODIQUES STATISTIQUES PRINCIPALEMENT UTILISÉS

Annuaire statistique de la France.

Biometrika :

Bulletin de la statistique générale de la France (B. S. G. F.)

Bulletin de statistique et de législation du ministère des finances.

Bulletin de l'Institut international de statistique (B. I. I. S.)

Journal de la Société de statistique de Paris (J. S. S. P.)

Metron.

INDEX DES TERMES TECHNIQUES

Ajustement.....	24	Indice d'inégalité	38
Asymétrie	47	— de solidarité	31
Binomiale (formule)	49	Interquartil	30
		— relatif	84
Centil.....	26	Médiale	27
Cinquièmes	85	Médiane	26
Courbe de fréquence	24	Mobilité (en note)	90
— en cloche	50	Mode	27
Décil	26	Moyennes arithm., géom., harm.	28
Déviation intermédiaire	85	Moments	28
Diagramme.....	22	— (principe des).....	42
Différence moyenne	86	Quartal	27
Dispersion.....	30	Quartil	26
Distribution	21		
Ecart moyen, quadratique	30	Rapport d'inégalité	87
Fréquences	22	— des quartils	85
		Répartition.....	21
Hétérograde	22	Standard deviation.....	30
Histogramme	23		
Homograde.....	22	Voussure	47

TABLE DES MATIÈRES

introduction	7
--------------------	---

PREMIERE PARTIE

ETUDE THEORIQUE DES REPARTITIONS ET DE LEUR INEGALITE

<i>Sommaire détaillé</i>	17
Chapitre premier. — Représentation graphique et courbes de fréquence.	21
Chapitre II. — Les grandeurs significatives d'une répartition.....	26
III. — L'ajustement mathématique <i>a priori</i>	40
IV. — L'ajustement par les formules du calcul des probabilités.....	48
V. — La formule de l'effet proportionnel.....	62
VI. — La loi de l'effet proportionnel.....	75
VII. — L'inégalité d'une répartition.....	83
<i>Résumé de la première partie.....</i>	91

DEUXIEME PARTIE

L'INEGALITE DANS LA REPARTITION DES BIENS

<i>Sommaire détaillé</i>	95
Chapitre premier. — Comment définir et comment étudier l'inégalité de répartition des biens ?.....	100
Chapitre II. — L'étude des données statistiques.....	117
III. — Résultats et conséquences.....	187

TROISIEME PARTIE

LA REPARTITION DES HOMMES ENTRE LES ENTREPRISES

<i>Sommaire détaillé</i>	197
Chapitre premier. — Comment étudier et comment définir la concentration	
Chapitre II. — Recensements industriels et concentration.....	207
III. — L'étude des données statistiques.....	217

QUATRIÈME PARTIE

LE CHAMP D'APPLICATION DE LA FORMULE
DE L'EFFET PROPORTIONNEL

<i>Sommaire détaillé</i>	248
Chapitre unique	249
Conclusion	257
Annexes : Sommaire détaillé	260
I. — La loi de l'effet proportionnel	261
II. — Le test de Pearson	270
Figures	275
Bibliographie	285
Index des termes techniques	293
Table des valeurs de la fonction $R(z)$	295

